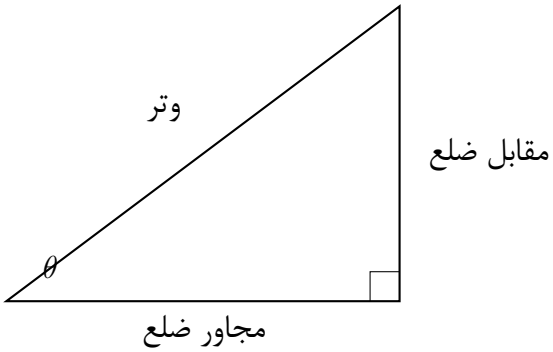
مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

تعریف

در مثلث قائم‌الزاویه برای زاویه حاده θ تعریف می‌کنیم:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{۱}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{۱}{\sin\theta}$$



مثال

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۳، ۴ و ۵، نسبت‌های مثلثاتی زاویه مقابل ضلع ۳ را بیابید.

پاسخ:

مثال

اگر $\sin\theta = \frac{۵}{۱۳}$ و θ حاده باشد، $\cos\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر برابر ۱۰ و یکی از زاویه‌های حاده ۳۰° است. طول اضلاع را بیابید.

پاسخ:

تمرین

الف) در مثلثی با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳، $\sin$ و $\cos$ زاویه مقابل ضلع ۱۲ را بنویسید. ب) اگر $\tan\theta = \frac{۷}{۲۴}$ و θ حاده باشد، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بیابید.

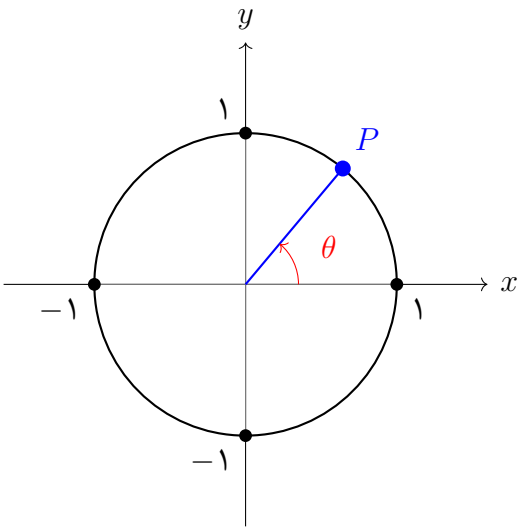
پاسخ:

دایره مثلثاتی

تعریف

دایره مثلثاتی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد است. برای هر زاویه θ، نقطه تقاطع ضلع انتهایی زاویه با این دایره را $P(x,y)$ می‌نامیم. آنگاه:

$$\cos\theta = x, \quad \sin\theta = y, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq ۰), \quad \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq ۰)$$



نکته

- زاویه مثبت در جهت پادساعت‌گرد و زاویه منفی در جهت ساعت‌گرد اندازه‌گیری می‌شود. - دو زاویه که اختلافشان مضرب صحیح ۲π باشد، نقطه یکسانی روی دایره ایجاد می‌کنند. - بازه استاندارد معمولاً $(-\pi, \pi]$ یا $[۰, ۲\pi)$ در نظر گرفته می‌شود.

مثال

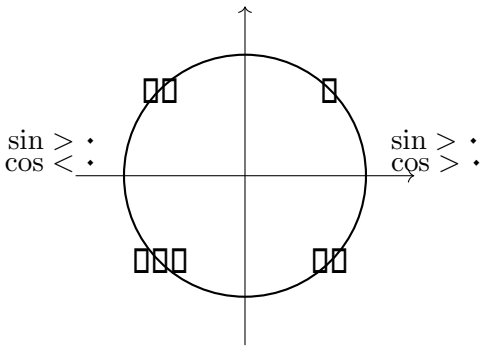
نقطه مربوط به زوایای $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید و مختصات آن‌ها را بنویسید.

پاسخ:

مثال

علامت $\sin$، $\cos$ و $\tan$ را در هر یک از چهار ربع مشخص کنید.

پاسخ:



جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم

درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	□	۰	□	۰
cot	□	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰	□	۰	□

نکته

برای زوایای منفی:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

مثال

مقدار $\sin\frac{\pi}{۳}$، $\cos\frac{۲\pi}{۳}$، $\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$، $\sin\frac{۷\pi}{۶}$ و $\cos\left(-\frac{۵\pi}{۶}\right)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

زاویه‌ای در بازه $[۰, ۲\pi)$ پیدا کنید که سینوس آن $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد.

پاسخ:

اتحادهای مثلثاتی

قانون

اتحادهای بنیادی:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$
$$۱ + \tan^۲\theta = \sec^۲\theta$$
$$۱ + \cot^۲\theta = \csc^۲\theta$$

قانون

اتحادهای زاویه مکمل و متمم:

$$\sin(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(۹۰^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin(۱۸۰^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(۱۸۰^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

قانون

اتحادهای مجموع و تفاضل:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

قانون

اتحادهای دو برابر:

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos ۲\theta = \cos^۲\theta - \sin^۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\theta$$
$$\tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱ - \tan^۲\theta}$$

نکته

اتحادهای نیم‌زاویه و توان‌کاهی:

$$\sin^۲\theta = \frac{۱ - \cos ۲\theta}{۲}$$
$$\cos^۲\theta = \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}$$

مثال

مقدار $\sin ۷۵^\circ$ و $\cos ۱۵^\circ$ را با اتحاد مجموع محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ و θ در ربع دوم باشد، $\cos\theta$، $\tan\theta$ و $\sin ۲\theta$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید $\frac{\sin ۲\theta}{۱+\cos ۲\theta} = \tan\theta$.

پاسخ:

مثال

حاصل $\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ$ را ساده کنید.

پاسخ:

تمرین

الف) $\tan ۱۵^\circ$ را بیابید. ب) اگر $\tan\theta = ۲$ باشد، $\sin ۲\theta$ و $\cos ۲\theta$ را حساب کنید. ج) نشان دهید $\sin^۲\theta\cos^۲\theta = \frac{۱-\cos ۴\theta}{۸}$.

پاسخ:

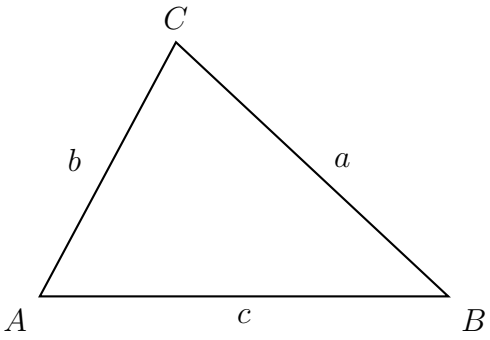
قضیه سینوس‌ها

قانون

در هر مثلث ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



مثال

در مثلثی $A = ۳۰^\circ$، $B = ۴۵^\circ$ و $a = ۶$. ضلع b را بیابید.

پاسخ:

مثال

در مثلثی $a = ۱۰$، $A = ۶۰^\circ$ و $B = ۴۵^\circ$. ضلع‌های دیگر را بیابید.

پاسخ:

قضیه کسینوس‌ها

قانون

در هر مثلث ABC:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

مثال

در مثلثی با اضلاع $a = ۵$، $b = ۶$ و $c = ۷$، کسینوس زاویه مقابل ضلع c را بیابید.

پاسخ:

مثال

در مثلثی $b = ۵$، $c = ۶$ و $A = ۶۰^\circ$. ضلع a را بیابید.

پاسخ:

مثال

در مثلثی با اضلاع ۷، ۸ و ۹، بزرگ‌ترین زاویه را پیدا کنید.

پاسخ:

مساحت مثلث

قانون

فرمول‌های مساحت:

$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin A = \frac{۱}{۲}ac\sin B = \frac{۱}{۲}ab\sin C$$

$$S = \frac{abc}{۴R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p = \frac{a+b+c}{۲})$$

مثال

مساحت مثلثی با دو ضلع ۸ و ۱۰ و زاویه بین آن‌ها ۳۰° را بیابید.

پاسخ:

مثال

مساحت مثلثی با اضلاع ۵، ۶ و ۷ را با فرمول هرون محاسبه کنید.

پاسخ:

معادلات مثلثاتی ساده

مثال

معادله $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ را در بازه $[۰, ۲\pi)$ حل کنید.

پاسخ:

مثال

معادله $\cos ۲\theta = \frac{۱}{۲}$ را در بازه $[۰, ۲\pi)$ حل کنید.

پاسخ:

مثال

معادله $\tan\theta = \sqrt{۳}$ را در بازه $(-\pi, \pi]$ حل کنید.

پاسخ:

مثال‌های تکمیلی

مثال

مقدار $\sin\frac{۵\pi}{۶} + \cos\frac{۲\pi}{۳} - \tan\frac{\pi}{۴}$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

اگر $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{۲}$ باشد، مقدار $\sin\theta\cos\theta$ و $\sin ۲\theta$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

در مثلثی $A=۴۵^\circ$، $B=۶۰^\circ$ و $a=۸$. اضلاع دیگر و مساحت را بیابید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید $\tan\theta + \cot\theta = \frac{۲}{\sin ۲\theta}$.

پاسخ:

مثال

حاصل $\cos ۱۵^\circ \cos ۷۵^\circ$ را ساده کنید.

پاسخ:

تمرین

الف) $\sin ۱۰۵^\circ$ را محاسبه کنید. ب) در مثلثی با اضلاع ۶، ۷ و ۸، زاویه مقابل ضلع ۸ را بیابید. ج) معادله $۲\cos^۲\theta - \sin\theta = ۱$ را در $[۰, ۲\pi)$ حل کنید.

پاسخ:

تست‌های پایان فصل

تست

$\sin ۳۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تست

$\cos \frac{۲\pi}{۳}$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست

$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\tan\theta$

تست

$\sin ۲\theta$ برابر است با:

۱) $۲\sin\theta\cos\theta$ ۲) $\sin\theta\cos\theta$ ۳) $۲\sin\theta$ ۴) $\cos^۲\theta - \sin^۲\theta$

تست

اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ و θ حاده باشد، $\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

تست

مساحت مثلثی با دو ضلع ۶ و ۱۰ و زاویه بین ۳۰° برابر است با:

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷.۵

تست

طبق قضیه کسینوس‌ها $c^۲$ برابر است با:

۱) $a^۲+b^۲-۲ab\cos C$ ۲) $a^۲+b^۲+۲ab\cos C$ ۳) $a^۲+b^۲$ ۴) $(a+b)^۲$

تست

$\tan(-\theta)$ برابر است با:

۱) $\tan\theta$ ۲) $-\tan\theta$ ۳) $\cot\theta$ ۴) $-\cot\theta$

تست

حاصل $\sin ۷۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست

در دایره مثلثاتی نقطه مربوط به $\frac{۳\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(۱,۰)$

تست

اگر $\sin\theta+\cos\theta=۱$ باشد، $\sin ۲\theta$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

تست

$\cos ۲\theta$ برابر است با:

۱) $۲\cos^۲\theta-۱$ ۲) $۲\sin\theta\cos\theta$ ۳) $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta$ ۴) $۱+\tan^۲\theta$

تست

در مثلثی $a=۲R\sin A$. این رابطه از کدام قضیه به‌دست می‌آید؟

۱) سینوس‌ها ۲) کسینوس‌ها ۳) هرون ۴) فیثاغورس

تست

$\sin(۱۸۰^\circ-\theta)$ برابر است با:

۱) $\sin\theta$ ۲) $-\sin\theta$ ۳) $\cos\theta$ ۴) $-\cos\theta$

تست

حاصل $\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

توابع مثلثاتی و تناوب

تعریف

توابع اصلی مثلثاتی عبارتند از:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=\cot x$$

تعریف

تناوب: تابع f را متناوب می‌گوییم هرگاه عددی مثبت مانند T وجود داشته باشد که برای هر x در دامنه، $f(x+T)=f(x)$. کوچک‌ترین چنین T را دوره تناوب اصلی می‌نامیم.

قانون

دوره تناوب اصلی توابع مثلثاتی:

$$\cos x \text{ و } \sin x : \quad T = ۲\pi$$
$$\cot x \text{ و } \tan x : \quad T = \pi$$

برای تابع $y = \sin(bx)$ دوره تناوب برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است. برای $y = \tan(bx)$ دوره تناوب برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال

دوره تناوب توابع زیر را بیابید:

۰. $y = \sin ۲x$

۰. $y = \cos \frac{x}{۳}$

۰. $y = \tan ۳x$

۰. $y = \sin(۲x - \frac{\pi}{۴})$

پاسخ:

مثال

دوره تناوب $y = ۳\sin(۴x) + ۱$ را بیابید.

پاسخ:

نکته

دامنه و برد:

- $\sin x$ و $\cos x$: دامنه $\mathbb{R}$، برد $[-۱, ۱]$
- $\tan x$: دامنه $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{۲} + k\pi\}$، برد $\mathbb{R}$
- $\cot x$: دامنه $\mathbb{R} - \{k\pi\}$، برد $\mathbb{R}$

$$xy-\pi-\pi\pi\pi$$

نمودار $y = \sin x$

مثال

نمودار کلی $y = \cos x$ را توصیف کنید و دوره تناوب و برد آن را بنویسید.

پاسخ:

معادلات مثلثاتی

قانون

جواب‌های کلی برخی معادلات ساده:

$$\sin x = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + ۲k\pi \quad \text{یا} \quad x = \pi - \alpha + ۲k\pi$$
$$\cos x = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \pm\alpha + ۲k\pi$$
$$\tan x = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + k\pi$$

$(k \in \mathbb{Z})$

مثال

معادله $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را حل کنید و جواب‌های موجود در بازه $[۰, ۲\pi)$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

معادله $\cos ۲x = \frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

پاسخ:

مثال

معادله $\tan x = \sqrt{۳}$ را در بازه $(-\pi, \pi]$ حل کنید.

پاسخ:

مثال

معادله $۲\sin^۲ x - \sin x - ۱ = ۰$ را حل کنید.

پاسخ:

مثال

معادله $\sin ۲x = \cos x$ را حل کنید.

پاسخ:

تمرین

الف) معادله $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ را حل کنید. ب) معادله $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید. ج) معادله $۲\cos^۲ x + \sin x = ۱$ را در $[۰, ۲\pi)$ حل کنید.

پاسخ:

اتحادهای بیشتر و کاربردها

قانون

تبدیل مجموع به حاصل‌ضرب:

$$\sin A + \sin B = ۲ \sin \frac{A+B}{۲} \cos \frac{A-B}{۲}$$
$$\sin A - \sin B = ۲ \cos \frac{A+B}{۲} \sin \frac{A-B}{۲}$$
$$\cos A + \cos B = ۲ \cos \frac{A+B}{۲} \cos \frac{A-B}{۲}$$
$$\cos A - \cos B = -۲ \sin \frac{A+B}{۲} \sin \frac{A-B}{۲}$$

مثال

حاصل $\sin ۷۵^\circ + \sin ۱۵^\circ$ را با اتحاد مجموع به حاصل‌ضرب ساده کنید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید $\sin ۳\theta = ۳ \sin \theta - ۴ \sin^۳ \theta$.

پاسخ:

مثال

اگر $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{۲}$ باشد، مقدار $\sin\theta\cos\theta$ را بیابید.

پاسخ:

تست‌های تکمیلی سخت‌تر

تست

دوره تناوب $y = \sin ۳x$ برابر است با:

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) π

تست

دوره تناوب $y = \tan ۲x$ برابر است با:

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

تست

جواب کلی معادله $\sin x = ۰$ کدام است؟

۱) $x = k\pi$ ۲) $x = ۲k\pi$ ۳) $x = \frac{\pi}{۲} + k\pi$ ۴) $x = \pi + ۲k\pi$

تست

اگر $\sin x = \frac{۱}{۲}$ باشد، یکی از جواب‌ها در بازه $[۰, ۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

تست

حاصل $\sin ۷۵^\circ + \sin ۱۵^\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست

اگر $\sin\theta + \cos\theta = ۱$ باشد، $\sin ۲\theta$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

تست

معادله $\cos ۲x = ۱$ در بازه $[۰, ۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست

برد تابع $y = ۲\sin x + ۳$ کدام است؟

۱) $[۱, ۵]$ ۲) $[-۱, ۱]$ ۳) $[۲, ۴]$ ۴) $[۰, ۶]$

تست

$\sin ۳\theta$ برابر است با:

۱) $۳\sin\theta - ۴\sin^۳\theta$ ۲) $۳\sin\theta + ۴\sin^۳\theta$ ۳) $۴\sin\theta - ۳\sin^۳\theta$ ۴) $\sin\theta$

تست

در مثلثی با اضلاع ۵، ۵ و ۶، کسینوس زاویه بین دو ضلع برابر ۵ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$