مجموعه‌ها

مفهوم مجموعه و عضویت

تعریف مجموعه

تعریف

مجموعه گردایه‌ای از اشیای مشخص و متمایز است که بتوانیم به‌طور قطعی بگوییم هر شیء مورد نظر عضو آن هست یا نیست. هر یک از این اشیا را **عضو** یا **عنصر** مجموعه می‌نامیم.

برای نمایش عضویت از نماد $\in$ و برای عدم عضویت از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم. اگر A مجموعه‌ای باشد و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$؛ در غیر این صورت می‌نویسیم $a \notin A$.

نکته

اعضای یک مجموعه باید مشخص و متمایز باشند. بنابراین عباراتی مانند «مجموعه اعداد زیبا» تعریف درستی برای یک مجموعه نیست، زیرا مفهوم «زیبا بودن» معیاری دقیق و یکسان ندارد. همچنین تکرار اعضا در مجموعه بی‌معنی است؛ مجموعه $\{۱, ۲, ۲, ۳\}$ همان مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ است. ترتیب نوشتن اعضا نیز اهمیتی ندارد و $\{۳, ۱, ۲\} = \{۱, ۲, ۳\}$.

مثال

کدام یک از موارد زیر را می‌توان مجموعه دانست؟ برای هر مورد دلیل خود را بنویسید.

۰. مجموعه دانش‌آموزان کلاس دهم که معدل بالاتر از هجده دارند.

۰. مجموعه اعداد طبیعی زوج.

۰. مجموعه کتاب‌های خوب کتابخانه مدرسه.

۰. مجموعه ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴ = ۰$.

۰. مجموعه اعداد حقیقی مثبت.

پاسخ:

مثال

اگر $A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ باشد، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید و دلیل بیاورید.

۰. $۴ \in A$

۰. $۵ \in A$

۰. $۱۲ \notin A$

۰. $۰ \in A$

۰. $۱۰ \in A$

پاسخ:

مثال

مجموعه‌ای مثال بزنید که دقیقاً سه عضو داشته باشد. مجموعه‌ای مثال بزنید که هیچ عضوی نداشته باشد. مجموعه‌ای مثال بزنید که نامتناهی باشد.

پاسخ:

روش‌های نمایش مجموعه

مجموعه‌ها را معمولاً به دو روش اصلی نمایش می‌دهند:

- **روش فهرستی**[۱]: اعضای مجموعه را داخل آکولاد می‌نویسیم و با ویرگول از هم جدا می‌کنیم.

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$

- **روش توصیفی**[۲]: ویژگی مشترک اعضا را بیان می‌کنیم.

$$A = \{x \mid x \text{ عدد طبیعی فرد کمتر از هشت است}\}$$

یا به صورت فشرده‌تر:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ فرد و } x < ۸\}$$

مثال

مجموعه اعداد طبیعی زوج کمتر از دوازده را هم به روش فهرستی و هم به روش توصیفی بنویسید.

پاسخ:

[۱] Roster Form
[۲] Set-builder Notation

مثال

اگر $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۶\}$ باشد، اعضای مجموعه B را به صورت فهرستی بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۳ \leq x < ۴\}$ را به صورت فهرستی بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه $\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ را به روش توصیفی بنویسید.

پاسخ:

تمرین

مجموعه اعداد صحیح بین منفی ده و ده که مضرب سه هستند را هم به روش فهرستی و هم به روش توصیفی بنویسید.

پاسخ:

مجموعه‌های خاص

تعریف

- **مجموعه تهی** که با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد.
- **مجموعه مرجع** (یا مجموعه جهانی) مجموعه‌ای است که همه مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه آن هستند و معمولاً با U نمایش داده می‌شود.
- مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$
- مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$
- مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$

- مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$
- مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$
- مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

خوب است بدانید

در برخی منابع قدیمی‌تر عدد صفر را نیز در مجموعه اعداد طبیعی قرار می‌دهند. در کتاب درسی ریاضی دهم، مجموعه $\mathbb{N}$ از عدد یک آغاز می‌شود.

مثال

مشخص کنید هر یک از اعداد زیر عضو کدام‌یک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ هستند:

$$-\frac{۷}{۳},\quad ۴.۷۵,\quad \pi,\quad \sqrt{۲},\quad \frac{۲}{۵},\quad ۰,\quad -۳,$$

پاسخ:

مثال

کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ دلیل خود را بنویسید.

۰. $\sqrt{۴} \in \mathbb{N}$

۰. $\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}$

۰. $-۵ \in \mathbb{N}$

۰. $۰ \in \mathbb{Z}$

۰. $\frac{۲۲}{۷} \in \mathbb{Q}$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

کدام گزینه تعریف درستی از مجموعه ارائه می‌دهد؟

۱) گردایه‌ای از اشیای مشخص و متمایز ۲) هر مجموعه از اعداد ۳) مجموعه‌ای از اشیای نامشخص ۴) هر فهرستی از اعداد

تست

کدام عبارت درست است؟

۱) $۲ \in \{۱,۲,۳\}$ ۲) $\{۲\} \in \{۱,۲,۳\}$ ۳) $۲ \subseteq \{۱,۲,۳\}$ ۴) $\{۱,۲\} \in \{۱,۲,۳\}$

تست

مجموعه تهی چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) نامتناهی ۴) تعریف نشده

تساوی مجموعه‌ها و زیرمجموعه

تساوی دو مجموعه

تعریف

دو مجموعه A و B را **مساوی** می‌گوییم و می‌نویسیم $A = B$، هرگاه دقیقاً اعضای یکسانی داشته باشند؛ یعنی هر عضو A عضو B باشد و هر عضو B نیز عضو A باشد. به عبارت دیگر:

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$$

مثال

آیا مجموعه‌های زیر مساوی‌اند؟ دلیل بیاورید.

۰. $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۳, ۱, ۲\}$

۰. $A = \{۱, ۲, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$

۰. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < ۴\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$

۰. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ = ۴\}$ و $B = \{۲, -۲\}$

پاسخ:

زیرمجموعه

تعریف

مجموعه A را **زیرمجموعه** مجموعه B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$، هرگاه هر عضو A عضو B نیز باشد.
اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$، آنگاه A را **زیرمجموعه سره** B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subset B$.

قانون

برای هر مجموعه A داریم:

$A \subseteq A$ و $\emptyset \subseteq A$

همچنین اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$.

مثال

اگر $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد، آیا $A \subseteq B$؟ آیا $A = B$؟ آیا $A \subset B$؟

پاسخ:

مثال

تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{a, b\}$ را بنویسید و مشخص کنید کدام‌یک زیرمجموعه سره هستند.

پاسخ:

مثال

اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < ۵\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد، آیا $A = B$؟

پاسخ:

مثال

آیا $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$؟ آیا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$؟ آیا $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$؟ دلیل بیاورید.

پاسخ:

تعداد زیرمجموعه‌ها

قانون

اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، تعداد کل زیرمجموعه‌های آن برابر ۲^n است. تعداد زیرمجموعه‌های سره برابر $۲^n - ۱$ است.

مثال

مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ همه آن‌ها را بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه $\{a, b, c, d\}$ چند زیرمجموعه سره دارد؟

پاسخ:

مثال

مجموعه‌ای با پنج عضو چند زیرمجموعه دارد؟ چند زیرمجموعه سره دارد؟ چند زیرمجموعه دوعضوی دارد؟

پاسخ:

تمرین

الف) تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{۲, ۴, ۶\}$ را بنویسید. ب) مجموعه‌ای با شش عضو چند زیرمجموعه دارد؟ چند زیرمجموعه سره دارد؟ ج) اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر شصت و چهار باشد، آن مجموعه چند عضو دارد؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۳\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A \subset B$ ۲) $A = B$ ۳) $B \subset A$ ۴) $A \not\subseteq B$

تست

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{a, b, c\}$ برابر است با:

۱) سه ۲) شش ۳) هفت ۴) هشت

تست

کدام گزینه درست است؟

۱) $\emptyset \in \{۱, ۲\}$ ۲) $\emptyset \subseteq \{۱, ۲\}$ ۳) $\{۱\} \in \{۱, ۲\}$ ۴) $۲ \subseteq \{۱, ۲\}$

تست

اگر مجموعه‌ای شش عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌های سره آن برابر است با:

۱) شصت و سه ۲) شصت و چهار ۳) سی و دو ۴) سی و یک

تست

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه تهی برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف

اگر تعداد اعضای یک مجموعه برابر با یک عدد حسابی مشخص (صفر، یک، دو، سه و ...) باشد، آن مجموعه را **متناهی** می‌نامیم. در غیر این صورت مجموعه را **نامتناهی** می‌گوییم.

نکته

بزرگ بودن یک مجموعه لزوماً به معنای نامتناهی بودن آن نیست. برای مثال مجموعه درختان جنگل آمازون متناهی است، هرچند تعداد آن‌ها بسیار زیاد است. اما مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی است، زیرا هر چقدر پیش برویم باز هم عدد بزرگ‌تری وجود دارد.

مثال

مشخص کنید هر یک از مجموعه‌های زیر متناهی است یا نامتناهی. در صورت متناهی بودن، تعداد اعضا را بنویسید.

۰. مجموعه اعداد طبیعی کمتر از صد

۰. مجموعه اعداد صحیح منفی

۰. مجموعه حروف الفبای فارسی

۰. مجموعه اعداد حقیقی در بازه $(۰, ۱)$

۰. مجموعه ریشه‌های معادله $x^۲ - ۹ = ۰$

۰. مجموعه اعداد اول کمتر از بیست

۰. مجموعه مضارب طبیعی عدد پنج

۰. مجموعه صفحات یک کتاب دویست صفحه‌ای

پاسخ:

مثال

آیا مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ < ۱۰\}$ متناهی است؟ اعضای آن را بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه اعداد طبیعی که مربع کامل هستند متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ + ۱ = ۰\}$ را در نظر بگیرید. متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

پاسخ:

تمرین

الف) مجموعه اعداد اول کمتر از سی را به صورت فهرستی بنویسید و مشخص کنید متناهی است یا نامتناهی. ب) آیا مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ = ۲\}$ متناهی است؟ ج) مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک متناهی است یا نامتناهی؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < ۱۰۰۰\}$ ۲) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ \leq x \leq ۵\}$ ۳) مجموعه حروف الفبای انگلیسی ۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\}$

تست

مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ \leq ۱\}$ چند عضو دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) نامتناهی

تست

کدام‌یک از گزینه‌های زیر مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک ۲) مجموعه اعداد طبیعی زوج ۳) مجموعه ریشه‌های معادله $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ ۴) مجموعه اعداد صحیح منفی

تست

بازه $[۳, ۳]$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) نامتناهی

عملیات روی مجموعه‌ها

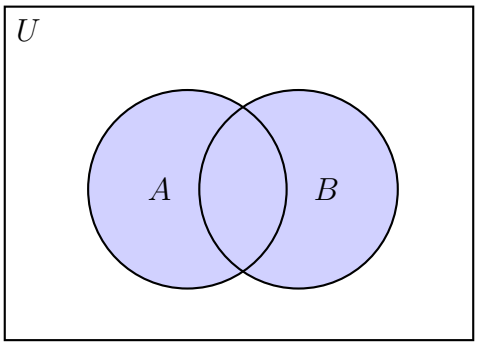
فرض کنید U مجموعه مرجع باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از U باشند.

اجتماع دو مجموعه

تعریف

اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است شامل همه اعضایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B باشند:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



نمودار ون اجتماع دو مجموعه $A \cup B$

مثال

اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۵\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid ۳ \leq x \leq ۸\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ را بنویسید.

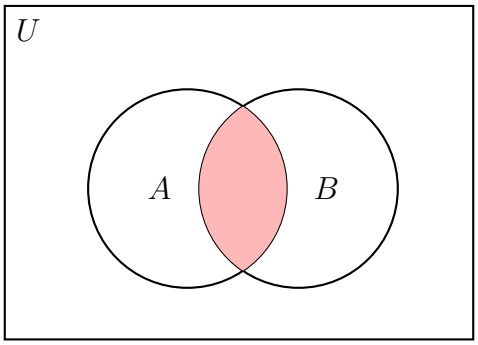
پاسخ:

اشتراک دو مجموعه

تعریف

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است شامل همه اعضایی که هم در A و هم در B باشند:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$



نمودار ون اشتراک دو مجموعه $A \cap B$

مثال

اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد، مجموعه $A \cap B$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

اگر دو مجموعه A و B مجزا باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$، نمودار ون آن‌ها چگونه خواهد بود؟

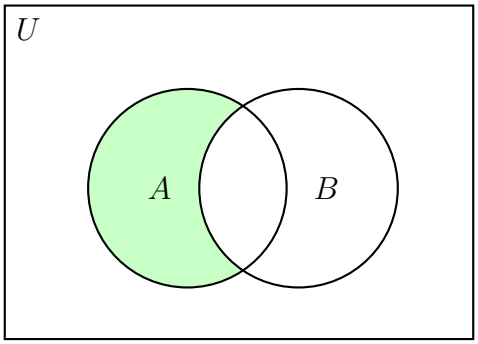
پاسخ:

تفاضل دو مجموعه

تعریف

تفاضل دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است شامل اعضایی که در A هستند ولی در B نیستند:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



نمودار ون تفاضل $A - B$

مثال

اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۳, ۴, ۶\}$ باشد، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ:

نکته

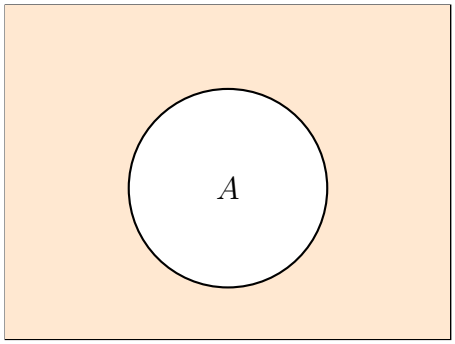
رابطه مهم: $A - B = A \cap B'$.

متمم یک مجموعه

تعریف

متمم مجموعه A نسبت به مجموعه مرجع U مجموعه‌ای است شامل همه اعضای U که در A نیستند:

$$A' = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



نمودار ون متمم A' (ناحیه رنگی)

قانون

قوانین مهم متمم:

$$(A')' = A$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$A \cup A' = U$$
$$A \cap A' = \emptyset$$
$$\emptyset' = U$$
$$U' = \emptyset$$

مثال

فرض کنید $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ و $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. موارد زیر را محاسبه کنید:

- A'
- B'
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A - B$
- $(A \cup B)'$
- $(A \cap B)'$

پاسخ:

مثال

اگر $U = \mathbb{R}$ و $A = (-\infty, ۳]$ باشد، متمم مجموعه A را به صورت بازه بنویسید.

پاسخ:

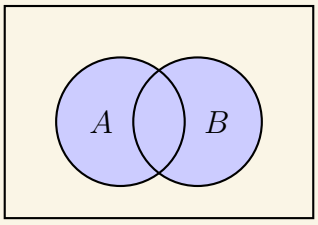
نکته

دو مجموعه را **مجزا** می‌نامیم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد، یعنی $A \cap B = \emptyset$.

تست‌های این بخش (به‌ویژه نمودار ون)

تست

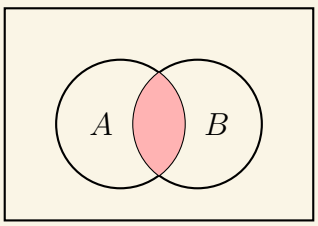
در نمودار ون زیر، ناحیه رنگی نشان‌دهنده کدام مجموعه است؟



۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $A - B$ ۴) A'

تست

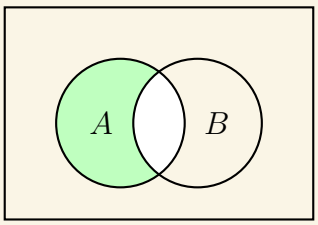
در نمودار ون زیر، ناحیه رنگی نشان‌دهنده کدام مجموعه است؟



۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $A - B$ ۴) $B - A$

تست

در نمودار ون زیر، ناحیه رنگی نشان‌دهنده کدام مجموعه است؟



۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $A - B$ ۴) A'

تست

اگر $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $A = \{۱, ۳, ۵\}$ باشد، آنگاه A' برابر است با:

۱) $\{۲, ۴, ۶\}$ ۲) $\{۱, ۲, ۳\}$ ۳) $\{۲, ۴, ۵, ۶\}$ ۴) $\emptyset$

تست

کدام‌یک از تساوی‌های زیر همیشه برقرار است؟

۱) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ ۲) $(A \cap B)' = A' \cap B'$ ۳) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ۴) $A \cup A' = \emptyset$

تست

اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

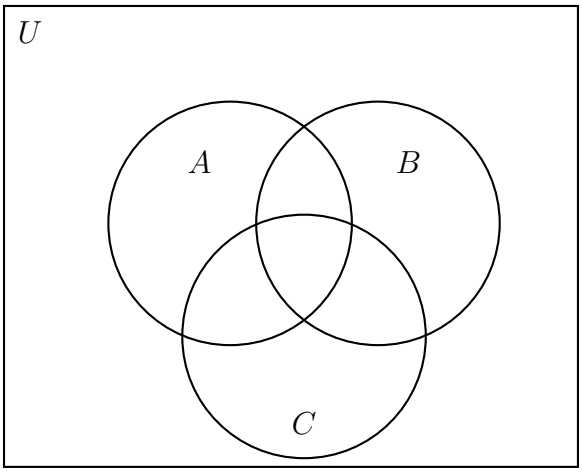
۱) $A' \subseteq B'$ ۲) $B' \subseteq A'$ ۳) $A' = B'$ ۴) $A' \cap B' = \emptyset$

تست

اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، آنگاه:

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $B \subseteq A$ ۳) $A \cup B = U$ ۴) $A' = B$

نمودار ون برای سه مجموعه



نمودار ون سه مجموعه

مثال

اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ باشد، موارد زیر را بیابید:

۰. $A\cup B\cup C$

۰. $A\cap B\cap C$

۰. $(A\cap B)-C$

۰. $A-(B\cup C)$

پاسخ:

مثال

ناحیه مشترک هر سه مجموعه را در نمودار ون توصیف کنید و یک مثال عددی برای آن بنویسید.

پاسخ:

مثال

ناحیه‌ای را که فقط متعلق به مجموعه A است (و در B و C نیست) توصیف کنید.

پاسخ:

تست‌های نمودار ون سه مجموعه‌ای

تست

در نمودار ون سه مجموعه‌ای، ناحیه مشترک هر سه مجموعه نشان‌دهنده کدام است؟

۱) $A \cup B \cup C$ ۲) $A \cap B \cap C$ ۳) $A - B - C$ ۴) $(A \cup B) \cap C$

تست

در یک کلاس ۲۰۰ نفری، ۱۲۰ نفر در کلاس ریاضی، ۹۰ نفر در کلاس فیزیک و ۷۰ نفر در کلاس شیمی شرکت کرده‌اند. ۴۰ نفر در ریاضی و فیزیک، ۳۰ نفر در ریاضی و شیمی، ۲۵ نفر در فیزیک و شیمی و ۱۵ نفر در هر سه کلاس شرکت دارند. چند نفر حداقل در یک کلاس شرکت دارند؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۶۰

تست

در همان کلاس ۲۰۰ نفری بالا، چند نفر فقط در کلاس ریاضی شرکت دارند؟

۱) ۶۵ ۲) ۵۵ ۳) ۷۰ ۴) ۴۵

تست

در یک گروه ۴۰ نفری، ۲۵ نفر عضو باشگاه فوتبال، ۲۰ نفر عضو باشگاه بسکتبال و ۱۰ نفر عضو هر دو باشگاه هستند. چند نفر عضو هیچ باشگاهی نیستند؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۰

تست

از ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر نمره ریاضی بالاتر از ۱۵، ۵۰ نفر نمره فیزیک بالاتر از ۱۵ و ۳۰ نفر در هر دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند. چند نفر حداقل در یکی از دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۰

تست

در یک مدرسه ۳۰۰ نفری، ۱۸۰ نفر به ورزش علاقه‌مندند، ۱۵۰ نفر به موسیقی علاقه‌مندند و ۹۰ نفر به هر دو علاقه دارند. چند نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰

تست

ناحیه‌ای که فقط در A و B باشد و در C نباشد، برابر است با:

۱) $(A\cap B)-C$ ۲) $(A\cup B)-C$ ۳) $A\cap B\cap C$ ۴) $A-B-C$

تست

در یک کلاس ۲۰۰ نفری، ۱۲۰ نفر در کلاس ریاضی، ۹۰ نفر در کلاس فیزیک و ۷۰ نفر در کلاس شیمی شرکت کرده‌اند. ۴۰ نفر در ریاضی و فیزیک، ۳۰ نفر در ریاضی و شیمی، ۲۵ نفر در فیزیک و شیمی و ۱۵ نفر در هر سه کلاس شرکت دارند. چند نفر حداقل در یک کلاس شرکت دارند؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۶۰

تست

در همان کلاس ۲۰۰ نفری بالا، چند نفر فقط در کلاس ریاضی شرکت دارند؟

۱) ۶۵ ۲) ۵۵ ۳) ۷۰ ۴) ۴۵

تست

در یک گروه ۴۰ نفری، ۲۵ نفر عضو باشگاه فوتبال، ۲۰ نفر عضو باشگاه بسکتبال و ۱۰ نفر عضو هر دو باشگاه هستند. چند نفر عضو هیچ باشگاهی نیستند؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۰

تست

از ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر نمره ریاضی بالاتر از ۱۵، ۵۰ نفر نمره فیزیک بالاتر از ۱۵ و ۳۰ نفر در هر دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند. چند نفر حداقل در یکی از دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۰

تست

در یک مدرسه ۳۰۰ نفری، ۱۸۰ نفر به ورزش علاقه‌مندند، ۱۵۰ نفر به موسیقی علاقه‌مندند و ۹۰ نفر به هر دو علاقه دارند. چند نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰

تست

اگر $|A| = ۱۲$، $|B| = ۱۸$، $|A \cap B| = ۵$ باشد، $|A \cup B|$ برابر است با:

۱) بیست و پنج ۲) سی ۳) بیست ۴) بیست و سه

تست

در یک کلاس ۲۰۰ نفری، ۱۲۰ نفر در کلاس ریاضی، ۹۰ نفر در کلاس فیزیک و ۷۰ نفر در کلاس شیمی شرکت کرده‌اند. ۴۰ نفر در ریاضی و فیزیک، ۳۰ نفر در ریاضی و شیمی، ۲۵ نفر در فیزیک و شیمی و ۱۵ نفر در هر سه کلاس شرکت دارند. چند نفر حداقل در یک کلاس شرکت دارند؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۶۰

تست

در همان کلاس ۲۰۰ نفری بالا، چند نفر فقط در کلاس ریاضی شرکت دارند؟

۱) ۶۵ ۲) ۵۵ ۳) ۷۰ ۴) ۴۵

تست

در یک گروه ۴۰ نفری، ۲۵ نفر عضو باشگاه فوتبال، ۲۰ نفر عضو باشگاه بسکتبال و ۱۰ نفر عضو هر دو باشگاه هستند. چند نفر عضو هیچ باشگاهی نیستند؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۰

تست

از ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر نمره ریاضی بالاتر از ۱۵، ۵۰ نفر نمره فیزیک بالاتر از ۱۵ و ۳۰ نفر در هر دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند. چند نفر حداقل در یکی از دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۰

تست

در یک مدرسه ۳۰۰ نفری، ۱۸۰ نفر به ورزش علاقه‌مندند، ۱۵۰ نفر به موسیقی علاقه‌مندند و ۹۰ نفر به هر دو علاقه دارند. چند نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰

خواص عملیات روی مجموعه‌ها

قانون

خواص مهم عملیات مجموعه‌ها:

جابجایی:	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
شرکت‌پذیری:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
توزیع‌پذیری:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
همانی:	$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A$
مکمل:	$A \cup A' = U, \quad A \cap A' = \emptyset$

مثال

با استفاده از خواص، عبارت $(A \cup B) \cap (A \cup B')$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.

پاسخ:

مثال

نشان دهید که $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

پاسخ:

بازه‌ها به عنوان مجموعه

تعریف

- بازه باز: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- بازه بسته: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- بازه نیم‌باز: $[a, b)$ و $(a, b]$

- بازه‌های نامتناهی: $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$، $(-\infty,b)$، $(-\infty,b]$ و $\mathbb{R}$

مثال

هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه توصیفی بنویسید و مشخص کنید متناهی‌اند یا نامتناهی:

۰. $(۲,۵)$

۰. $[-۱,۳]$

۰. $(۰,+\infty)$

۰. $[۴,۴]$

پاسخ:

مثال

اجتماع و اشتراک بازه‌های زیر را بیابید:

۰. $(۱,۵)\cup(۳,۸)$

۰. $(۱,۵)\cap(۳,۸)$

۰. $[-۲,۴]-(۰,۳)$

پاسخ:

مثال

متمم بازه $[۰, ۱]$ نسبت به $\mathbb{R}$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ < ۴\}$ را به صورت بازه بنویسید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $A = (۰, ۱)$ و $B = (۰.۵, ۲)$ باشد، $A \cap B$ برابر است با:

۱) $(۰, ۲)$ ۲) $(۰.۵, ۱)$ ۳) $(۰, ۰.۵)$ ۴) $(۱, ۲)$

تست

متمم بازه $(-\infty, ۰]$ نسبت به $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $[۰, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۰)$ ۴) $\mathbb{R}$

خلاصه درس

نکته

نکات کلیدی فصل مجموعه‌ها:

- مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است و روابط $\emptyset \subseteq A$ و $A \subseteq A$ همیشه برقرارند.
- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است.
- قوانین دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
- تفاضل: $A - B = A \cap B'$.
- اصل شمول و عدم شمول: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- بازه‌ها مجموعه‌های خاصی از اعداد حقیقی هستند و عملیات روی آن‌ها مانند مجموعه‌ها انجام می‌شود.
- برای درک بهتر عملیات از نمودار ون استفاده کنید.

قانون

فرمول‌های مهم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$A - B = A \cap B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^n$$

مثال‌های تکمیلی

مثال

در یک کلاس ۲۰۰ نفری، ۱۲۰ نفر در کلاس ریاضی، ۹۰ نفر در کلاس فیزیک و ۷۰ نفر در کلاس شیمی شرکت کرده‌اند. ۴۰ نفر همزمان در ریاضی و فیزیک، ۳۰ نفر همزمان در ریاضی و شیمی، ۲۵ نفر همزمان در فیزیک و شیمی و ۱۵ نفر در هر سه کلاس شرکت دارند.

۰. چند نفر حداقل در یک کلاس شرکت دارند؟

۰. چند نفر فقط در کلاس ریاضی شرکت دارند؟

۰. چند نفر در هیچ کلاسی شرکت ندارند؟

پاسخ:

مثال

از میان ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر نمره ریاضی بالاتر از ۱۵ گرفته‌اند، ۵۰ نفر نمره فیزیک بالاتر از ۱۵ و ۳۰ نفر در هر دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند.

۰. چند نفر حداقل در یکی از دو درس نمره بالاتر از ۱۵ دارند؟

۰. چند نفر فقط در ریاضی نمره بالاتر از ۱۵ دارند؟

۰. چند نفر در هیچ‌کدام از دو درس نمره بالاتر از ۱۵ ندارند؟

پاسخ:

مثال

در یک گروه ۴۰ نفری، ۲۵ نفر عضو باشگاه فوتبال، ۲۰ نفر عضو باشگاه بسکتبال و ۱۰ نفر عضو هر دو باشگاه هستند. با رسم نمودار ون، تعداد کسانی که عضو هیچ باشگاهی نیستند را بیابید.

پاسخ:

مثال

فرض کنید $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۱۵\}$، $A = \{x \in U \mid x \text{ زوج}\}$، $B = \{x \in U \mid x \text{ مضرب سه}\}$ و $C = \{x \in U \mid x > ۱۰\}$.

۰. $A \cap B$ را بیابید.

۰. $(A \cup B)'$ را محاسبه کنید.

۰. $A - (B \cup C)$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

اگر تعداد اعضای مجموعه A برابر دوازده، تعداد اعضای مجموعه B برابر هجده و تعداد اعضای اشتراک آن‌ها برابر پنج باشد، تعداد اعضای اجتماع آن‌ها را بیابید.

پاسخ:

مثال

در یک کلاس سی‌نفره، هجده نفر عضو گروه ریاضی، پانزده نفر عضو گروه فیزیک و هشت نفر عضو هر دو گروه هستند. چند نفر حداقل در یکی از دو گروه عضو هستند؟ چند نفر در هیچ گروهی عضو نیستند؟

پاسخ:

مثال

ثابت کنید $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

پاسخ:

مثال

اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$، نشان دهید $A\subseteq C$.

پاسخ:

مثال

تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{۰\}$ را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

الف) اگر $|A| = ۷$، تعداد زیرمجموعه‌های سره مجموعه A چند تا است؟ ب) اگر $A \cap B = A \cup B$، چه نتیجه‌ای در مورد A و B می‌گیرید؟ ج) متمم بازه $(-\infty, ۰]$ نسبت به $\mathbb{R}$ را بنویسید.

پاسخ:

تست‌های پایان فصل

تست

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < ۱۰۰۰\}$ ۲) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ \leq x \leq ۵\}$ ۳) مجموعه حروف الفبای انگلیسی ۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\}$

تست

اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۳\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A \subset B$ ۲) $A = B$ ۳) $B \subset A$ ۴) $A \not\subseteq B$

تست

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{a, b, c\}$ برابر است با:

۱) سه ۲) شش ۳) هفت ۴) هشت

تست

کدام گزینه درست است؟

۱) $\emptyset \in \{۱, ۲\}$ ۲) $\emptyset \subseteq \{۱, ۲\}$ ۳) $\{۱\} \in \{۱, ۲\}$ ۴) $۲ \subseteq \{۱, ۲\}$

تست

مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ \leq ۱\}$ چند عضو دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) نامتناهی

تست

اگر مجموعه‌ای شش عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌های سره آن برابر است با:

۱) شصت و سه ۲) شصت و چهار ۳) سی و دو ۴) سی و یک

تست

اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۳,۵\}$ باشد، آنگاه A' برابر است با:

۱) $\{۲,۴,۶\}$ ۲) $\{۱,۲,۳\}$ ۳) $\{۲,۴,۵,۶\}$ ۴) $\emptyset$

تست

کدام‌یک از تساوی‌های زیر همیشه برقرار است؟

۱) $(A\cup B)'=A'\cup B'$ ۲) $(A\cap B)'=A'\cap B'$ ۳) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ۴) $A\cup A'=\emptyset$

تست

اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A'\subseteq B'$ ۲) $B'\subseteq A'$ ۳) $A'=B'$ ۴) $A'\cap B'=\emptyset$

تست

اگر $A\cap B=\emptyset$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subseteq B'$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A\cup B=U$ ۴) $A'=B$

تست

اگر $|A|=۱۰$، $|B|=۱۵$ و $|A\cap B|=۴$ باشد، $|A\cup B|$ برابر است با:

۱) بیست و یک ۲) بیست و پنج ۳) نوزده ۴) بیست و نه

تست

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه تهی برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) نامتناهی

تست

بازه $[۳,۳]$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) نامتناهی

تست

اگر $A\cup B=A$ باشد، آنگاه:

۱) $B\subseteq A$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A=B$ ۴) $A\cap B=\emptyset$

تست

$(A \cap B)'$ برابر است با:

۱) $A' \cap B'$ ۲) $A' \cup B'$ ۳) $A \cup B$ ۴) $A - B$

تست

اگر $A = (۰, ۱)$ و $B = (۰.۵, ۲)$ باشد، $A \cap B$ برابر است با:

۱) $(۰, ۲)$ ۲) $(۰.۵, ۱)$ ۳) $(۰, ۰.۵)$ ۴) $(۱, ۲)$

تست

اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر سی و دو باشد، آن مجموعه چند عضو دارد؟

۱) چهار ۲) پنج ۳) شش ۴) سه

تست

کدام‌یک از گزینه‌های زیر مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک ۲) مجموعه اعداد طبیعی زوج ۳) مجموعه ریشه‌های معادله $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ ۴) مجموعه اعداد صحیح منفی

تست

در نمودار ون، ناحیه مشترک دو دایره نشان‌دهنده کدام است؟

۱) اجتماع ۲) اشتراک ۳) تفاضل ۴) متمم

تست

اگر A و B مجزا باشند، آنگاه $|A \cup B|$ برابر است با:

۱) $|A| + |B|$ ۲) $|A| - |B|$ ۳) $|A| \cdot |B|$ ۴) $|A| + |B| - |A \cap B|$