توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

قواعد توان

تعریف

برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n، توان a^n به معنای ضرب a در خودش به تعداد n بار است:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ بار}}$$

قانون

قواعد اصلی توان (برای $a, b \neq ۰$ و اعداد صحیح مناسب):

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{mn} \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\
a^۰ &= ۱ \quad (a \neq ۰) \\
a^{-n} &= \frac{۱}{a^n}
\end{aligned}$$

نکته

نکات مهم توان:

- $a^۰ = ۱$ فقط برای $a \neq ۰$ تعریف می‌شود.
- $(-a)^n$ با $-a^n$ متفاوت است. مثلاً $(-۲)^۴ = ۱۶$ ولی $-۲^۴ = -۱۶$.
- برای ساده کردن کسرهای توان‌دار، بهتر است همه را به توان مثبت تبدیل کنید.
- $(a^m)^n = a^{mn}$ ولی a^{m^n} معنای دیگری دارد (توان روی توان).

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید:

۰. $۲^{۳} \cdot ۲^{۵}$

۰. $\frac{۳^{۷}}{۳^{۴}}$

۰. $(۵^{۲})^{۳}$

۰. $(۲ \times ۳)^{۴}$

۰. $۷^{۰}$

۰. $۴^{-۲}$

پاسخ:

مثال

عبارت $\frac{x^{۵} \cdot x^{-۲}}{x^{۳}}$ را ساده کنید (با فرض $x \neq ۰$).

پاسخ:

مثال

عبارت $(۲a^{۳}b^{-۱})^{۴}$ را بدون پرانتز و با توان‌های مثبت بنویسید.

پاسخ:

تمرین

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

۰. $\frac{(۲x^{۲}y)^{۳}}{۴xy^{۲}}$

۰. $(۳a^{-۲})^{۳} \cdot a^{۴}$

۰. $\left(\frac{x^{۲}}{y^{۳}}\right)^{-۲}$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

حاصل $۳^{۴} \cdot ۳^{-۲}$ برابر است با:

۱) ۹ ۲) $۳^{۲}$ ۳) $۳^{۶}$ ۴) ۱

تست

$(۲^{۳})^{۲}$ برابر است با:

۱) $۲^{۵}$ ۲) $۲^{۶}$ ۳) $۴^{۳}$ ۴) $۸^{۲}$

تست

$۵^{-۲}$ برابر است با:

۱) -۲۵ ۲) $\frac{۱}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۲۵}$ ۴) ۲۵

تست

حاصل $\frac{۲^{-۴} \cdot (۲^{۳})^{۲}}{۲^{-۱}}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

تست

اگر $(a+b)^{-۱} = a^{-۱} + b^{-۱}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $ab = ۱$ ۲) $a + b = ۱$ ۳) $a = b$ ۴) هیچ‌کدام

ریشه و توان‌های گویا

ریشه دوم و ریشه nام

تعریف

اگر $a \geq ۰$ باشد، **ریشه دوم** a عددی نامنفی مانند b است که $b^{۲} = a$. آن را با $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. برای عدد طبیعی n، ریشه nام a عددی است که توان nام آن برابر a شود و با $\sqrt[n]{a}$ نمایش داده می‌شود.

قانون

قواعد مهم ریشه:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{(برای } n \text{ زوج)}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{(برای } n \text{ فرد)}$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

نکته

نکات مهم ریشه و توان گویا:

- $\sqrt{a^۲} = |a|$ (همیشه قدر مطلق).
- برای n زوج، $\sqrt[n]{a}$ فقط برای $a \geq ۰$ در اعداد حقیقی تعریف می‌شود.
- رادیکال‌های تو در تو را از داخل به خارج ساده کنید.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ فقط وقتی $a, b \geq ۰$.

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

۰. $\sqrt{۳۶}$

۰. $\sqrt[۳]{-۸}$

۰. $\sqrt{۱۸}$

۰. $\sqrt[۴]{۱۶}$

پاسخ:

مثال

عبارت $\sqrt{۵۰}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

عبارت $\sqrt{۲۷}+\sqrt{۱۲}$ را ساده کنید.

پاسخ:

توان‌های گویا

تعریف

برای عدد گویای $\frac{m}{n}$ (با $n>۰$) تعریف می‌کنیم:

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

(با شرایط مناسب روی a).

مثال

حاصل $۸^{۲/۳}$ و $۱۶^{۳/۴}$ و $۲۷^{-۱/۳}$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

عبارت $\frac{x^{۱/۲} \cdot x^{۳/۲}}{x}$ را ساده کنید.

پاسخ:

تمرین

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

۰. $\sqrt{۳۲} + \sqrt{۸}$

۰. $۱۶^{۳/۲}$

۰. $\sqrt[۳]{۵۴} - \sqrt[۳]{۱۶}$

۰. $\left(\frac{۸}{۲۷}\right)^{۲/۳}$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$\sqrt{۴۸}$ برابر است با:

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۱۲}$ ۴) $۳\sqrt{۴}$

تست

$۲۷^{۲/۳}$ برابر است با:

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۳ ۴) ۶

تست

$\sqrt[۳]{-۶۴}$ برابر است با:

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۸ ۴) ۸

تست

حاصل $\sqrt{۴۸} - \sqrt{۲۷} + \sqrt{۱۲}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۰

تست

$\sqrt{۸ + ۲\sqrt{۱۵}}$ را ساده کنید. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sqrt{۵} + \sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ ۳) $۲ + \sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵} + \sqrt{۲}$

تست

حاصل $\frac{\sqrt{۱۸}-\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۳

تست

$(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲$ برابر است با:

۱) $۵+۲\sqrt{۶}$ ۲) $۵+\sqrt{۶}$ ۳) $۶+۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵

اتحادهای جبری

اتحاد مربع دو جمله‌ای

قانون

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

اثبات:

$$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

به همین ترتیب برای $(a-b)^۲$.

مثال

$(x+۳)^۲$ و $(۲y-۵)^۲$ را بسط دهید.

پاسخ:

مثال

عبارت $x^۲ + ۶x + ۹$ را به صورت مربع یک دوجمله‌ای بنویسید.

پاسخ:

اتحاد مزدوج (تفاضل مربعات)

قانون

$$a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$$

اثبات:

$$(a - b)(a + b) = a^۲ + ab - ba - b^۲ = a^۲ - b^۲$$

مثال

$x^۲ - ۱۶$ و $۹y^۲ - ۲۵$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

مثال

حاصل $(x + ۲)(x - ۲)$ را بدون ضرب مستقیم بنویسید.

پاسخ:

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات

قانون

$$a^۳ + b^۳ = (a + b)(a^۲ - ab + b^۲)$$
$$a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲)$$

اثبات (برای $a^۳ - b^۳$):

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲) = a\cdot a^۲+a\cdot ab+a\cdot b^۲-b\cdot a^۲-b\cdot ab-b\cdot b^۲ = a^۳+a^۲b+ab^۲-a^۲b-ab^۲-b^۳ = a^۳-b^۳$$

مثال

$x^۳ + ۸$ و $y^۳ - ۲۷$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

مثال

حاصل $(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)$ را بیابید.

پاسخ:

اتحاد مربع سه جمله‌ای

قانون

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

مثال

$(x+y+۲)^۲$ را بسط دهید.

پاسخ:

اتحادهای مرتبه بالاتر و نکات مهم

نکته

نکات تستی اتحادها:

- $a^۲ + b^۲$ به‌طور کلی تجزیه نمی‌شود (مگر با اعداد مختلط).
- $a^۲ + ۲ab + b^۲ = (a+b)^۲$ و $a^۲ - ۲ab + b^۲ = (a-b)^۲$.
- برای تجزیه $a^۴ - b^۴$ می‌توان نوشت: $a^۴ - b^۴ = (a^۲)^۲ - (b^۲)^۲ = (a^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲) = (a-b)(a+b)(a^۲ + b^۲)$.

مثال

$۱۶ - x^۴$ را به‌طور کامل تجزیه کنید.

پاسخ:

مثال

عبارت $۱ - x^۳$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

تمرین

عبارت‌های زیر را بسط یا تجزیه کنید:

۰. $(۳x - ۴)^۲$

۰. $۲۵a^۲ - ۹b^۲$

۰. $۸x^۳ + ۲۷$

۰. $x^۴ - ۸۱$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$(x + ۵)^۲$ برابر است با:

۱) $x^۲ + ۱۰x + ۲۵$ ۲) $x^۲ + ۵x + ۲۵$ ۳) $x^۲ + ۲۵$ ۴) $x^۲ + ۱۰x$

تست

$a^۲ - ۹$ برابر است با:

۱) $(a - ۳)^۲$ ۲) $(a - ۳)(a + ۳)$ ۳) $(a + ۳)^۲$ ۴) $a(a - ۹)$

تست

$x^۳ + ۸$ برابر است با:

۱) $(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$ ۲) $(x+۲)(x^۲+۲x+۴)$ ۳) $(x-۲)(x^۲-۲x+۴)$ ۴) $(x + ۲)^۳$

تست

۱ $-x^۴$ برابر است با:

۱) $(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)$ ۲) $(x^۲-۱)^۲$ ۳) $(x-۱)^۴$ ۴) $(x^۲+۱)(x^۲-۱)$

تست

حاصل $(x+y)^۲-(x-y)^۲$ برابر است با:

۱) $۴xy$ ۲) $۲xy$ ۳) $۴x$ ۴) $۲x^۲$

تست

$\frac{x^۳-۸}{x^۲-۴}$ پس از ساده‌سازی (با فرض‌های مناسب) برابر است با:

۱) $\frac{x^۲+۲x+۴}{x+۲}$ ۲) $x+۲$ ۳) $\frac{x-۲}{x+۲}$ ۴) $x^۲+۲x+۴$

تست

حاصل $(a+b+c)^۲-(a^۲+b^۲+c^۲)$ برابر است با:

۱) $۲(ab+ac+bc)$ ۲) $ab+ac+bc$ ۳) $۲ab+۲ac+۲bc$ ۴) $a+b+c$

تست

اگر $x+\frac{۱}{x}=۳$ باشد، مقدار $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۱۱

تست

اگر $x-\frac{۱}{x}=۲$ باشد، مقدار $x^۳-\frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۲

بسط دوجمله‌ای (فرمول نیوتن)

قانون

برای عدد طبیعی n:

$$(a+b)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

که در آن $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

چند حالت خاص:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$
$$(a+b)^۴ = a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$$

مثال

$(x+۲)^۳$ و $(x-۱)^۴$ را با استفاده از فرمول نیوتن بسط دهید.

پاسخ:

مثال

ضریب $x^۲$ در بسط $(x+۳)^۵$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

$(۲x-۱)^۳$ را بسط دهید.

پاسخ:

عبارت‌های جبری و ساده‌سازی

تعریف

عبارت جبری ترکیبی از اعداد، متغیرها و عملیات جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و توان است.

مثال

عبارت $\frac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$ را ساده کنید (با فرض $x \neq ۲$).

پاسخ:

مثال

عبارت $\frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x + ۲}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

عبارت $\frac{x^۳ - ۸}{x - ۲}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

حاصل $\frac{۱}{x - ۱} + \frac{x}{x + ۱}$ را به یک کسر تبدیل کنید.

پاسخ:

تمرین

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

۰. $\frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۶x + ۹}$

۰. $\frac{x^۳ + ۱}{x + ۱}$

۰. $\frac{۲}{x} - \frac{۳}{x + ۱}$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$\frac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$ پس از ساده‌سازی برابر است با:

۱) $x + ۲$ ۲) $x - ۲$ ۳) x ۴) ۲

تست

$\frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x + ۳}$ برابر است با:

۱) $x + ۲$ ۲) $x + ۳$ ۳) $x + ۱$ ۴) $x - ۲$

مثال‌های تکمیلی

مثال

حاصل $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ را به صورت $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ بنویسید.

پاسخ:

مثال

اگر $x+\frac{۱}{x}=۵$ باشد، مقدار $x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ و $x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

عبارت $\frac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-x+۱}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

عبارت $(x+y)^۲-(x-y)^۲$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید $(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$.

پاسخ:

مثال

عبارت $\sqrt{۳۲}+\sqrt{۸}-\sqrt{۱۸}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

حاصل $(x+۱)^۳-(x-۱)^۳$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

ضریب $x^۳$ در بسط $(x+۲)^۶$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

الف) $x^۴ - ۱۶$ را به‌طور کامل تجزیه کنید. ب) عبارت $\frac{x^۳ - ۲۷}{x - ۳}$ را ساده کنید. ج) $(۳x - ۲)^۲ - (x + ۱)^۲$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

تست‌های پایان فصل

تست

$(a - b)^۲$ برابر است با:

۱) $a^۲ - b^۲$ ۲) $a^۲ - ۲ab + b^۲$ ۳) $a^۲ + ۲ab + b^۲$ ۴) $a^۲ + b^۲$

تست

$a^۳ - b^۳$ برابر است با:

۱) $(a-b)(a^۲-ab+b^۲)$ ۲) $(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ ۳) $(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ ۴) $(a - b)^۳$

تست

$\sqrt{۷۲}$ برابر است با:

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

تست

$۸^{۵/۳}$ برابر است با:

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۸

تست

$\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ پس از ساده‌سازی برابر است با:

۱) $x+۱$ ۲) $x-۱$ ۳) x ۴) ۱

تست

$(x+۲)^۳$ برابر است با:

۱) $x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸$ ۲) $x^۳+۸$ ۳) $x^۳+۶x+۸$ ۴) $x^۳+۲x^۲+۴x+۸$

تست

$x^۴-۸۱$ برابر است با:

۱) $(x-۳)(x+۳)(x^۲+۹)$ ۲) $(x^۲-۹)^۲$ ۳) $(x-۹)(x+۹)$ ۴) $(x^۲-۹)(x^۲+۹)$

تست

اگر $a^{۲/۳}=۴$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۲

تست

حاصل $(۲x+۳)(۲x-۳)$ برابر است با:

۱) $۴x^۲-۹$ ۲) $۴x^۲+۹$ ۳) $۲x^۲-۳$ ۴) $۴x^۲-۶x-۹$

تست

$\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۱۲۵}$ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵

تست

$(a+b+c)^۲$ برابر است با:

۱) $a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$ ۲) $a^۲+b^۲+c^۲$ ۳) $a^۲+b^۲+c^۲+ab+ac+bc$ ۴) $(a+b+c)(a+b-c)$

تست

$\frac{x^۳-۱}{x-۱}$ برابر است با:

۱) $x^۲+x+۱$ ۲) $x^۲-x+۱$ ۳) $x^۲+۱$ ۴) $x+۱$

تست

$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}$ برابر است با:

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

تست

$(۲x+۳)^۲$ برابر است با:

۱) $۴x^۲+۱۲x+۹$ ۲) $۴x^۲+۹$ ۳) $۴x^۲+۶x+۹$ ۴) $۲x^۲+۳$

تست

$a^۴-b^۴$ برابر است با:

۱) $(a-b)(a+b)(a^۲+b^۲)$ ۲) $(a^۲-b^۲)^۲$ ۳) $(a-b)^۴$ ۴) $(a^۲+b^۲)(a+b)^۲$

مثال

عبارت $\frac{x^۲-۵x+۶}{x-۲}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$.

پاسخ:

مثال

عبارت $\sqrt{۸} - \sqrt{۱۸} + \sqrt{۵۰}$ را ساده کنید.

پاسخ:

مثال

حاصل $(x+y)^۲ + (x-y)^۲$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

ضریب جمله $x^۴$ در بسط $(x+۱)^۷$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

الف) $x^۳+۶۴$ را تجزیه کنید. ب) عبارت $\frac{x^۲-۴x+۴}{x-۲}$ را ساده کنید. ج) $(x+۲)^۴$ را با فرمول نیوتن بسط دهید.

پاسخ: