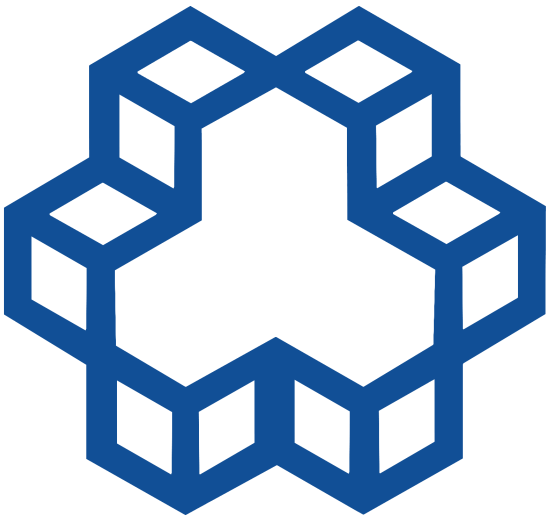


عنوان: تمرین امتیازی سری دوم

نیم‌سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری‌راد

مبحث تمرین: آنالیز مختلط و نگاشت

مهلت تحویل: ۱۹ دی

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۳
۲ سوال دوم ۳
۳ سوال سوم ۴
۴ سوال چهارم ۴
۵ سوال پنجم ۴
۶ سوال ششم ۴
۷ سوال هفتم ۵

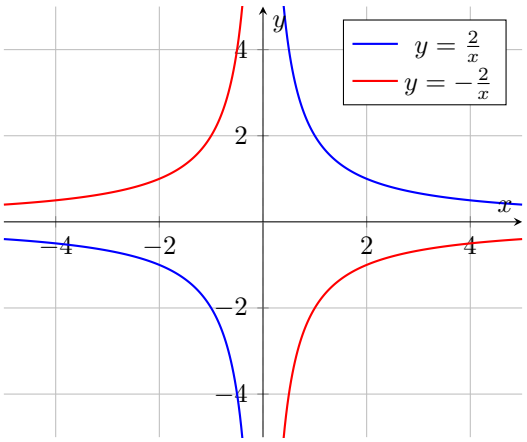
۱ سوال اول

سوال: ظرفیت خازن بین صفحات نشان داده شده در نمودار زیر را با استفاده از نگاشت مختلط مناسب بیابید. برای تخت کردن ناحیه و محاسبه ظرفیت، از نگاشت

$$w = z^2$$

استفاده کنید.

نمودار $y = \pm\frac{2}{x}$



۲ سوال دوم

یک ذره به جرم m تحت اثر نیروی مرکزی

$$\vec{F}(r) = -k\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad k > 0$$

قرار دارد. معادلات حرکت آن در مختصات قطبی (r, θ) به صورت زیر است:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r^2}, \qquad mr^2\dot{\theta} = L$$

۱. معادله مسیر $r(\theta)$ را با استفاده از نگاشت مختلط

$$z = re^{i\theta}$$

بدست آورید.

۲. شرایط لازم برای تشکیل یک **مدار بسته** را بررسی کنید.

۳. انرژی کل ذره E را بر حسب r، $\dot{r}$ و L بنویسید و فاصله‌های کمینه و بیشینه از مرکز را تعیین کنید.

۴. مسیر ذره را برای مقادیر مشخص E و L رسم کنید.

۵. بررسی کنید اگر نیرو به صورت

$$F(r) \sim \frac{1}{r^{2+\epsilon}}$$

تغییر کند، چه اثری بر بسته بودن مدار خواهد داشت.

راهنمایی:

- نگاشت مختلط تحلیل معادلات قطبی را ساده می‌کند.
- مدارهای بسته تنها برای نیروهای خاصی امکان‌پذیرند.

۳ سوال سوم

یک دستگاه گرمایی یک چرخه **کارنو** انجام می‌دهد که در آن گاز ایده‌آل تک‌اتمی بین دو منبع حرارتی با دماهای T_H و T_C حرکت می‌کند. مسیرهای انبساط و تراکم به صورت غیرخطی تعریف شده‌اند:

$$V(T) = V_0 \left(1 + \alpha \frac{T}{T_H}\right)^n$$

که در آن n عددی مشخص و $\alpha \ll 1$ است.

۱. معادله $P(V)$ برای مسیرهای انبساط و تراکم را بر حسب T بدست آورید.

۲. کار انجام شده در هر مسیر را با انتگرال‌گیری محاسبه کنید:

$$W = \int P\, dV$$

۳. کار خالص چرخه و بازده η را با در نظر گرفتن تغییرات غیرخطی حجم بیابید.

۴. نمودار $P-V$ چرخه را برای مقادیر مشخص V_0، α و n رسم کنید.

۵. بررسی کنید که چگونه تغییر n یا α بر بازده چرخه تأثیر می‌گذارد.

راهنمایی:

- از رابطه گاز ایده‌آل $PV = nRT$ استفاده کنید.
- برای $\alpha \ll 1$ می‌توان از بسط سری استفاده کرد.
- بازده را با $\eta = 1 - T_C/T_H$ مقایسه کنید.

۴ سوال چهارم

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$$

۱. با استفاده از جایگزینی مناسب، انتگرال را به فرم قابل حل تبدیل کنید.

۲. در صورت نیاز از **انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء** یا **تبدیل لاپلاس** استفاده کنید.

۳. مقدار نهایی I را به صورت تحلیلی بدست آورید.

۴. بررسی کنید اگر به جای $(1+x^2)^2$ از $(1+x^2)^n$ استفاده شود، نتیجه چگونه تغییر می‌کند.

۵ سوال پنجم

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$$

۶ سوال ششم

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^4+4}\, dx$$

۱. تابع مختلط

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+4}$$

را در صفحه مختلط در نظر بگیرید و قطب‌های آن را مشخص کنید.

۲. مسیر انتگرال بسته شامل **نیم‌صفحه بالایی** و یک نیم‌دایره بزرگ رسم کنید و از **قضیه مانده‌ها** استفاده کنید.

۳. با محاسبه مانده‌ها در قطب‌های نیم‌صفحه بالایی، مقدار انتگرال را بدست آورید.

۴. بررسی کنید اگر مخرج به صورت $z^n + a^n$ (با n زوج) باشد، روش حل چه تغییری می‌کند.