عنوان:تمرین سری شش

نیم‌سال تحصیلی:۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری‌راد

مبحث تمرین:حساب مانده ها

مهلت تحویل:۷دی

فهرست مطالب

۱ سوال اول

محاسبه کنید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\cos\theta}.$$

چه اتفاقی می‌افتد اگر $|b| > |a|$؟

همچنین محاسبه کنید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad a > |b|.$$

۲ سوال دوم

نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}, \quad a > 1.$$

۳ سوال سوم

محاسبه کنید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} = \frac{2\pi}{1-t^2}, \quad |t| < 1.$$

چه اتفاقی می‌افتد اگر $|t| > 1$ یا $|t| = 1$؟

۴ سوال چهارم

با استفاده از حساب مانده‌ها نشان دهید که

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

راهنمایی: از رابطه $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ |z| = 1$ استفاده کنید.

۵ سوال پنجم

انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2}\, dx, \quad a > b > 0$$

را محاسبه کنید.

۶ سوال ششم

اثبات کنید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi.$$

راهنما: از رابطه $\sin x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ استفاده کنید.

۷ سوال هفتم

نشان دهید که

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

۸ سوال هشتم

نشان دهید که برای $a > 0$:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

اگر $\cos x$ با $\cos kx$ جایگزین شود، سمت راست چگونه تغییر می‌کند؟

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx = \pi e^{-a}.$$

اگر $\sin x$ با $\sin kx$ جایگزین شود، سمت راست چگونه تغییر می‌کند؟

۹ سوال نهم

یک محاسبه مکانیک کوانتومی برای احتمال گذار منجر به تابع

$$f(t,\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega t)}{\omega^2}$$

می‌شود. نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\omega)\, d\omega = 2\pi t.$$

موفق باشید.