عنوان:تمرین سری‌یک

نیم‌سال تحصیلی:۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری‌راد

مبحث تمرین:آنالیز مختلط

مهلت تحویل:۲۶مهر

فهرست مطالب

۱ سوال اول

ثابت کنید: به عنوان مثالی از یک تکینی اساسی، تابع $e^{1/z}$ را در نظر بگیرید، آنگاه که z به صفر نزدیک می‌شود. برای هر عدد مختلط z_0 به طوری که $z_0 \neq 0$، نشان دهید که معادله $e^{1/z} = z_0$ دارای بی‌نهایت جواب است.

۲ سوال دوم

نشان دهید که تابع $w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ تک‌مقداری است، اگر برش‌های شاخه را روی محور حقیقی برای $x > 1$ و برای $x < -1$ اعمال کنیم.

۳ سوال سوم

تابعی به نام $f(z)$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ نمایش داده می‌شود، که در آن $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحلیلی هستند. مخرج، یعنی $f_2(z)$، در نقطه $z = z_0$ صفر می‌شود که نشان می‌دهد $f(z)$ در $z = z_0$ دارای قطب است. همچنین فرض کنید $f_1(z_0) \neq 0$ و $f_2'(z_0) \neq 0$. نشان دهید که ضریب a_{-1}، یعنی ضریب جمله $(z - z_0)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ حول $z = z_0$، برابر است با $a_{-1} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$.

۴ سوال چهارم

برای تابع سوال دوم، یک شاخه یکتا تعیین کنید به طوری که مقداری که برای $f(i)$ به دست می‌آید، با مقدار محاسبه‌شده برای $f(i)$ در مثال ۴.۶.۱۱ یکسان باشد. با آنکه سوال دوم و مثال ۴.۶.۱۱ یک تابع چندمقداری یکسان را توصیف می‌کنند، به دلیل تفاوت در مکان برش‌های شاخه، مقادیر اختصاص‌داده‌شده به تابع در همه نقاط صفحه مختلط یکسان نخواهد بود. نواحی‌ای از صفحه مختلط را که در آن‌ها این دو توصیف با یکدیگر توافق دارند و نواحی‌ای را که توافق ندارند، مشخص کنید و تفاوت‌ها را توصیف نمایید.

۵ سوال پنجم

تمام تکینی‌های تابع $z^{-1/3} + z^{-1/4} + \frac{(z-2)^{1/2}}{(z-3)^3}$ را بیابید و نوع هر یک را مشخص کنید (برای مثال نقطه شاخه مرتبه دوم، قطب مرتبه پنجم، و غیره). همچنین هرگونه تکینی در نقطه بی‌نهایت را نیز در نظر بگیرید.

نکته. یک نقطه شاخه مرتبه n است اگر برای بازگشت به مقدار اولیه تابع، به n دور گردش حول آن نقطه نیاز باشد و نه کمتر.

۶ سوال ششم

تابع $F(z) = \ln(z^2 + 1)$ به وسیله برش‌های شاخه خطی از نقطه $(0, -1)$ به $(-\infty, -1)$ و از نقطه $(0, +1)$ به $(0, +\infty)$ تک‌مقداری شده است (نگاه کنید به شکل ۱۷.۱۱). اگر $F(0) = -2\pi i$ باشد، مقدار $F(i - 2)$ را بیابید.

۷ سوال هفتم

(الف) تابع $f_1(z)$ به صورت $f_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt$ (که در آن t حقیقی است) تعریف شده است. نشان دهید دامنه‌ای که در آن $f_1(z)$ وجود دارد و تحلیلی است، ناحیه $\mathrm{Re}(z) > 0$ می‌باشد.

(ب) نشان دهید که $f_2(z) = \frac{1}{z}$ در ناحیه $\mathrm{Re}(z) > 0$ با $f_1(z)$ برابر است و بنابراین یک ادامه تحلیلی از $f_1(z)$ روی کل صفحه مختلط، به جز در نقطه $z = 0$، به شمار می‌آید.

(پ) تابع $\frac{1}{z}$ را حول نقطه $z = -i$ بسط دهید. در این صورت خواهیم داشت $f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + i)^n$. دامنه اعتبار این فرمول برای $f_3(z)$ چیست؟

موفق باشید.