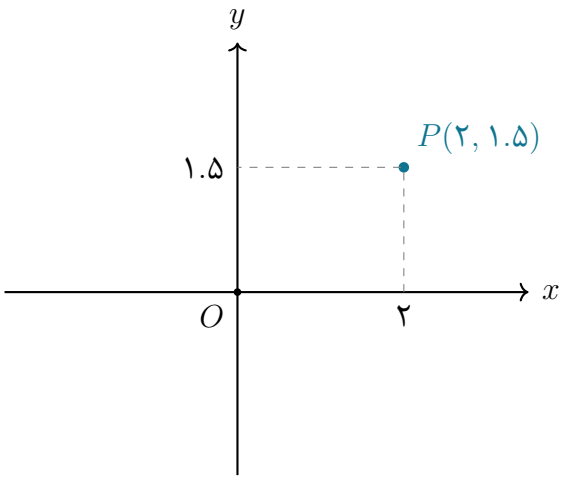
بردارها

آشنایی با فضای $\mathbb{R}^۲$

در سال‌های قبل با صفحه و دستگاه مختصات دوبعدی آشنا شدیم. هر نقطه از صفحه با یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی مشخص می‌شود. مجموعه همهٔ این زوج‌های مرتب را **فضای دوبعدی** یا $\mathbb{R}^۲$ می‌نامیم.



قضیه

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ در صفحه برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}.$$

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با

$$M = \left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \frac{y_۱ + y_۲}{۲} \right).$$

مثال

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۱, ۲)$ و $B(۴, ۶)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

وسط پاره‌خط AB با $A(۲,-۱)$ و $B(۴,۳)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,-۴)$ از مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین

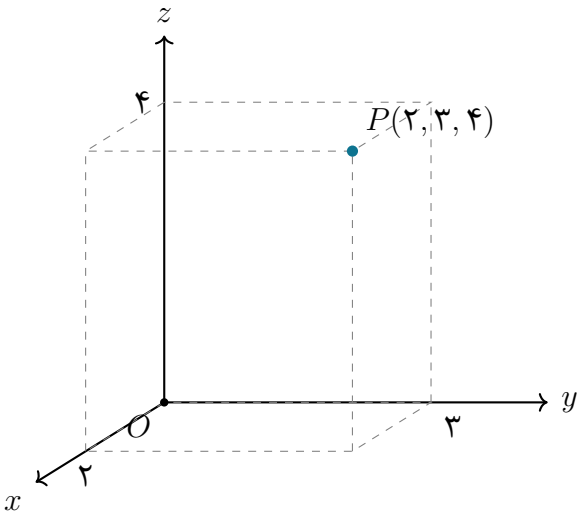
وسط پاره‌خطی به دو سر $(۱,۴)$ و $(-۳,۰)$ را بیابید.

پاسخ:

آشنایی با فضای $\mathbb{R}^3$

اکنون به فضای سه‌بعدی می‌پردازیم. هر نقطهٔ فضا با یک سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی مشخص می‌شود. مجموعه همهٔ این سه‌تایی‌ها را فضای سه‌بعدی یا $\mathbb{R}^3$ می‌نامیم.

سه محور مختصات x، y و z در مبدأ دوبه‌دو بر هم عمودند. هر دو محور یک **صفحهٔ مختصات** می‌سازند (xy، xz و yz). این سه صفحه فضا را به هشت **ناحیهٔ** تقسیم می‌کنند.



قضیه

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

مثال

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(1, 2, 3)$ و $B(4, 6, 15)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

وسط پاره‌خط AB با $A(۲,-۱,۵)$ و $B(۴,۳,-۱)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۰,-۴)$ از مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین

فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,-۳,۶)$ از مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین

وسط پاره‌خطی به دو سر $(۱, ۴, -۲)$ و $(-۳, ۰, ۶)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ (a, b, c) از مبدأ برابر $\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$ است.

پاسخ:

تمرین

نقطه‌ای روی محور z بیابید که از دو نقطهٔ $(۱, ۲, ۳)$ و $(۳, ۰, ۱)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر نقطهٔ M وسط AB باشد، آنگاه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, ۲, ۲)$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۹ ۴) ۵

تست

وسط پاره‌خطی به دو سر $(۲, ۴, ۶)$ و $(۰, ۲, -۲)$ کدام است؟

۱) $(۱, ۳, ۴)$ ۲) $(-۱, -۱, -۴)$ ۳) $(۱, ۳, ۲)$ ۴) $(۲, ۶, ۴)$

تست

کدام نقطه روی محور yها قرار دارد؟

۱) $(۰,۵,۰)$ ۲) $(۵,۰,۰)$ ۳) $(۵,۵,۰)$ ۴) $(۰,۵,۵)$

تست

فاصلهٔ دو نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ و $(۱,۲,۷)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

تست

اگر $A(۱,۰,۰)$ و $B(۰,۱,۰)$ و $C(۰,۰,۱)$، طول میانه از A به ضلع BC کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

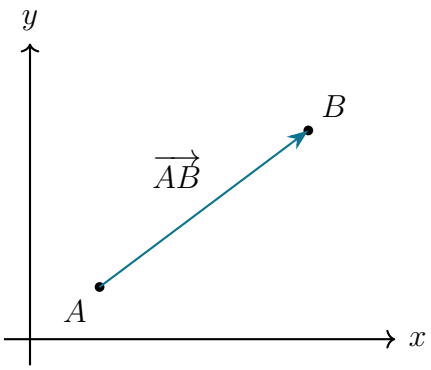
بردار در فضا

تعریف

بردار پاره‌خطی جهت‌دار است که با طول (اندازه) و جهت مشخص می‌شود. بردار $\overrightarrow{AB}$ با نقطهٔ شروع $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و نقطهٔ پایان $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دارای مختصات

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_۲ - x_۱,\ y_۲ - y_۱,\ z_۲ - z_۱)$$

است. دو بردار برابرند اگر و تنها اگر مختصات‌هایشان برابر باشد.



تعریف

اندازهٔ (طول) بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ برابر است با

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}.$$

بردار **یکه** هم‌جهت با $\vec{a}$ برابر $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ است (به شرط $\vec{a} \neq \vec{۰}$).

قانون

بردارهای یکهٔ محورها:

$$\vec{i} = (۱, ۰, ۰), \qquad \vec{j} = (۰, ۱, ۰), \qquad \vec{k} = (۰, ۰, ۱).$$

هر بردار را می‌توان به صورت $\vec{a} = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$ نوشت.

نکته

بردار صفر $\vec{۰} = (۰, ۰, ۰)$ دارای اندازهٔ صفر است و جهت مشخصی ندارد. بردار مقابل $\vec{a}$ برابر $-\vec{a}$ است.

مثال

بردار $\overrightarrow{AB}$ و اندازهٔ آن را برای $A(۱, ۲, ۳)$ و $B(۴, -۲, ۱۵)$ بیابید.

پاسخ:

مثال

بردار یکهٔ هم‌جهت با $(۲, -۱, ۲)$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

اگر $\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$، اندازهٔ آن را بیابید و بردار یکه هم‌جهت را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

مختصات بردار $\overrightarrow{PQ}$ را برای $P(۳, -۱, ۴)$ و $Q(-۱, ۲, ۰)$ بیابید و اندازه‌اش را حساب کنید.

پاسخ:

تمرین

بردار یکه‌ای هم‌جهت با $\overrightarrow{AB}$ بنویسید که $A(۰, ۱, ۲)$ و $B(۳, ۱, -۲)$ باشد.

پاسخ:

تمرین

اگر $|\vec{a}| = ۵$ و $\vec{a}$ موازی محور y مثبت باشد، $\vec{a}$ را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

بردار $\vec{a} = (a, ۲, -۱)$ دارای اندازهٔ ۳ است. مقدارهای ممکن a را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ باشد، اندازهٔ $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۹}$ ۳) ۹ ۴) ۱

تست

بردار یکهٔ هم‌جهت با $(۰, ۳, ۴)$ کدام است؟

۱) $(۰, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵})$ ۲) $(۰, ۳, ۴)$ ۳) $(۰, \frac{۳}{۷}, \frac{۴}{۷})$ ۴) $(۰, ۱, ۱)$

تست

بردار $\overrightarrow{AB}$ برای $A(۱, ۲, ۳)$ و $B(۴, ۶, ۸)$ کدام است؟

۱) $(۳, ۴, ۵)$ ۲) $(۵, ۸, ۱۱)$ ۳) $(-۳, -۴, -۵)$ ۴) $(۱, ۲, ۳)$

تست

اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $\vec{a}$ هم‌جهت با $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ باشد، $\vec{a}$ کدام است؟

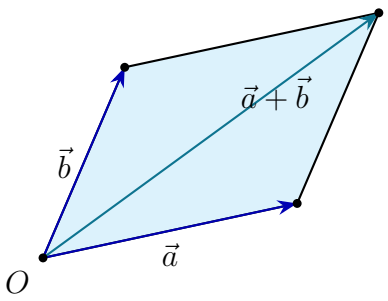
۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ۲) $۲(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ۳) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

عملیات روی بردارها

قضیه

برای بردارهای $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ و عدد حقیقی k:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_۱ + b_۱,\ a_۲ + b_۲,\ a_۳ + b_۳),$$
$$k\vec{a} = (ka_۱,\ ka_۲,\ ka_۳).$$



قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع برای جمع دو بردار

تعریف

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ **موازی** (هم‌راستا) هستند اگر و تنها اگر عددی حقیقی مانند k وجود داشته باشد که $\vec{a} = k\vec{b}$.

قانون

خواص جمع و ضرب اسکالر:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

مثال

اگر $\vec{a} = (۳, ۴, ۵)$ و $\vec{b} = (m - ۱, n + ۲, ۱۰)$ موازی باشند، m و n را بیابید.

پاسخ:

مثال

بردار $\vec{b}$ موازی با $\vec{a} = (-۱, ۲, ۲)$ و با اندازهٔ ۱۵ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

اگر $\vec{a} = (۱, ۲, -۱)$ و $\vec{b} = (۲, -۱, ۳)$، حاصل $\vec{a} + \vec{b}$، $\vec{a} - \vec{b}$ و $۳\vec{a} - ۲\vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a} = (m - ۱, ۴, n + ۵)$ و $\vec{b} = (۶, ۱۲, ۰)$ موازی باشند، حاصل $m - n$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = (-۴, ۲, -۶)$ را از نظر موازی بودن بررسی کنید.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$ آنگاه $\vec{b} = \vec{۰}$.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ و $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۴$، $|\vec{c}| = ۵$، نشان دهید $\vec{a} \perp \vec{b}$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر دو بردار $(۳,۴,۵)$ و $(m-۱,n+۲,۱۰)$ موازی باشند، m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

تست

حاصل $۲\vec{a}-۳\vec{b}$ برای $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۲)$ کدام است؟

۱) $(۲,-۳,-۸)$ ۲) $(۲,-۳,-۴)$ ۳) $(۲,۳,-۸)$ ۴) $(-۲,۳,۸)$

تست

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند و $|\vec{a}|=۲|\vec{b}|$، کدام می‌تواند درست باشد؟

۱) $\vec{a}=۲\vec{b}$ ۲) $\vec{a}=-۲\vec{b}$ ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

ضرب داخلی

تعریف

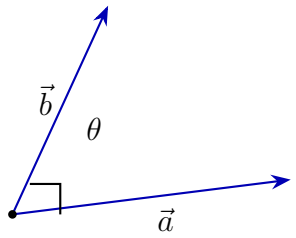
اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار و θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد، **ضرب داخلی** (ضرب نقطه‌ای) آن‌ها برابر است با

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳.$$

قانون

خواص ضرب داخلی:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
- $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ اگر و تنها اگر $\vec{a}\perp\vec{b}$ یا یکی از آن‌ها صفر باشد.



مثال

اگر $\vec{a}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۲)$ باشد، ضرب داخلی و زاویهٔ بین آن‌ها را بیابید.

پاسخ:

مثال

مقدار m را طوری بیابید که دو بردار $(m-۱,۲,-۱)$ و $(۳,m,۲)$ بر هم عمود باشند.

پاسخ:

مثال

اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۵$ و $|\vec{a} + \vec{b}| = ۴$، حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۵$ و $|\vec{c}| = ۶$ و $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{۰}$، حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر نقاط $A(-۲,۲,۳)$، $B(۰,۱,۵)$ و $C(-۱,۱,۳)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، زاویهٔ رأس A را تعیین کنید.

پاسخ:

تمرین

m را طوری بیابید که زاویهٔ بین $\vec{a}=(m,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵° باشد.

پاسخ:

تمرین

اگر $|\vec{a}|=۳$، $|\vec{b}|=۱$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۱۳}$، زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید $|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ + ۲\vec{a}\cdot\vec{b}$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ برای $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(-۱,۰,۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) -۲

تست

شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار ناصفر کدام است؟

۱) ضرب خارجی صفر ۲) ضرب داخلی صفر ۳) اندازه‌ها برابر ۴) موازی بودن

تست

اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۴$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۶$، آنگاه $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) ۱۲ ۳) $\sqrt{۱۰۸}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

تست

اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ آنگاه زاویهٔ بین دو بردار کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

ضرب خارجی

تعریف

ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ برداری است عمود بر هر دو که با

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = (a_۲b_۳ - a_۳b_۲,\ a_۳b_۱ - a_۱b_۳,\ a_۱b_۲ - a_۲b_۱)$$

تعریف می‌شود.

قضیه

اندازهٔ ضرب خارجی برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که روی دو بردار ساخته می‌شود:

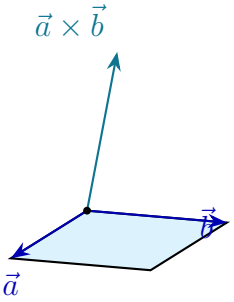
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta.$$

در نتیجه مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

نکته

جهت $\vec{a} \times \vec{b}$ با قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود: اگر انگشتان دست راست از $\vec{a}$ به سمت $\vec{b}$ بچرخند، شست جهت ضرب خارجی را نشان می‌دهد.



قانون

خواص ضرب خارجی:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ عمود بر هر دو $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

مثال

$\vec{a} = (۱, ۲, ۳)$ و $\vec{b} = (-۱, ۰, ۲)$ را در نظر بگیرید. $\vec{a} \times \vec{b}$ و مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید.

پاسخ:

مثال

مساحت مثلث با رأس‌های $A(۱, ۰, ۰)$، $B(۰, ۲, ۰)$ و $C(۰, ۰, ۳)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

ثابت کنید $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$، $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ و $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

پاسخ:

تمرین

مساحت متوازی‌الاضلاعی را بیابید که روی بردارهای $(۱, ۲, ۲)$ و $(۲, ۱, -۲)$ ساخته شده است.

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلث با رأس‌های $(۰,۰,۰)$، $(۱,۱,۰)$ و $(۰,۱,۱)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{۰}$ آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی‌اند.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰$، نشان دهید $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $(۱, ۰, ۰)$ و $(۰, ۲, ۰)$ ساخته شده است کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

تست

مساحت مثلث با رأس‌های $(۰, ۰, ۰)$، $(۳, ۰, ۰)$ و $(۰, ۴, ۰)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱۲

تست

اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{۰}$ آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) حتماً $\vec{a} = \vec{۰}$ ۲) حتماً $\vec{a} \perp \vec{b}$ ۳) حتماً $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ۴) هیچ‌کدام

تست

حاصل $|\vec{i} \times \vec{j}|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

تست

اگر $\vec{a} = (۱, ۰, ۰)$ و $\vec{b} = (۰, ۱, ۰)$، آنگاه $\vec{a} \times \vec{b}$ کدام است؟

۱) $\vec{k}$ ۲) $-\vec{k}$ ۳) $\vec{i}$ ۴) $\vec{j}$

ضرب مخلوط و حجم

تعریف

ضرب مخلوط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عدد اسکالر

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

است.

قضیه

قدر مطلق ضرب مخلوط برابر حجم متوازی‌السطوح (متوازی‌السطوح) ساخته‌شده روی سه بردار است:

$$V_{\text{متوازی‌السطوح}} = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

حجم چهاروجهی (هرم با قاعده مثلثی) ساخته‌شده روی همان سه بردار برابر $\frac{۱}{۶}$ این مقدار است:

$$V_{\text{چهاروجهی}} = \frac{۱}{۶}\left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right|.$$

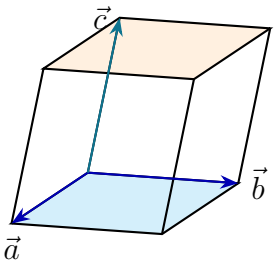
سه بردار **هم‌صفحه**‌اند اگر و تنها اگر ضرب مخلوطشان صفر باشد.

نکته

اگر سه بردار از یک رأس یک متوازی‌السطوح خارج شوند، قدرمطلق ضرب مخلوط دقیقاً حجم آن متوازی‌السطوح است. اگر سه بردار از یک رأس یک چهاروجهی خارج شوند، حجم چهاروجهی یک‌ششم این مقدار است.

قضیه

مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $|\vec{a}\times\vec{b}|$ و مساحت مثلث ساخته‌شده روی آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است.



مثال

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی بردارهای $(۲,۰,۰)$، $(۰,۲,۰)$ و $(۱,۱,۲)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

حجم چهاروجهی با رأس‌های $(۰,۰,۰)$، $(۲,۰,۰)$، $(۰,۳,۰)$ و $(۰,۰,۶)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -۱۲$ باشد، حجم متوازی‌السطوح و حجم چهاروجهی مربوطه را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر سه بردار هم‌صفحه باشند، آنگاه یکی از آن‌ها ترکیب خطی دو تای دیگر است.

پاسخ:

تمرین

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی $\vec{i}+\vec{j}$، $\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{k}+\vec{i}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a} = (۱, ۲, ۳)$، $\vec{b} = (-۱, ۰, ۲)$ و $\vec{c} = (۲, ۱, -۱)$، حجم متوازی‌السطوح و حجم چهاروجهی ساخته‌شده روی این سه بردار را بیابید.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دوبه‌دو عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی آن‌ها برابر $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ است.

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلث با رأس‌های $A(۱, ۰, ۲)$، $B(۳, ۱, ۰)$ و $C(۰, ۲, ۱)$ را با استفاده از ضرب خارجی بیابید.

پاسخ:

تمرین

اگر $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۱۲$ و زاویه بین دو بردار ۳۰° باشد و $|\vec{a}| = ۴$، اندازهٔ $\vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر ضرب مخلوط سه بردار صفر باشد، آن سه بردار چه وضعی دارند؟

۱) یکه‌اند ۲) دوبه‌دو عمودند ۳) موازی‌اند ۴) هم‌صفحه‌اند

تست

اگر $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -۱۲$ باشد، حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی آن‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴۴

تست

اگر ضرب مخلوط سه بردار ۱۲ باشد، حجم چهاروجهی ساخته‌شده روی آن‌ها کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۲

تست

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

معادلهٔ خط در فضا

تعریف

خطی که از نقطهٔ $P_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ بگذرد و موازی بردار هادی $\vec{v} = (l, m, n)$ باشد، دارای معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x = x_۰ + lt \\ y = y_۰ + mt \\ z = z_۰ + nt \end{cases}$$

و معادلات متقارن

$$\frac{x - x_۰}{l} = \frac{y - y_۰}{m} = \frac{z - z_۰}{n}$$

(در صورت ناصفر بودن مؤلفه‌ها) است.

نکته

اگر یکی از مؤلفه‌های بردار هادی صفر باشد، معادلات متقارن به صورت دیگری نوشته می‌شود. برای مثال اگر $l = ۰$، آنگاه $x = x_۰$ و $\frac{y - y_۰}{m} = \frac{z - z_۰}{n}$.

مثال

معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۱, ۲, -۱)$ بگذرد و موازی بردار $(۲, -۱, ۳)$ باشد.

پاسخ:

مثال

معادلات متقارن خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,-۱,۴)$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

نقطهٔ برخورد خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z+۱}{-۱}$ با صفحهٔ $x+y+z=۳$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

خطی که از $(۲, ۱, ۰)$ می‌گذرد و موازی بردار $\vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$ است را به صورت پارامتری بنویسید.

پاسخ:

تمرین

نشان دهید دو خط

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۱}{-۱} = \frac{z}{۳}, \qquad \frac{x+۲}{۴} = \frac{y-۳}{-۲} = \frac{z-۱}{۶}$$

موازی‌اند.

پاسخ:

تمرین

معادلات خط گذرنده از $(۰, ۰, ۰)$ و موازی با خط $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{۳} = \frac{z-۳}{۴}$ را بنویسید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

معادلات پارامتری خط گذرنده از $(۱, ۰, ۰)$ با بردار هادی $(۰, ۱, ۱)$ کدام است؟

۱) $x = ۱,\ y = t,\ z = t$ ۲) $x = t,\ y = ۱,\ z = ۱$ ۳) $x = ۱ + t,\ y = t,\ z = t$ ۴) $x = t,\ y = t,\ z = ۱$

تست

اگر دو خط موازی باشند، بردارهای هادی آن‌ها چه وضعی دارند؟

۱) عمود ۲) موازی ۳) یکسان ۴) هیچ‌کدام

معادلهٔ صفحه

تعریف

اگر $\vec{n} = (A, B, C)$ یک بردار قائم (عمود) بر صفحه باشد و صفحه از نقطهٔ $P.(x., y., z.)$ بگذرد، معادلهٔ صفحه برابر است با

$$A(x - x.) + B(y - y.) + C(z - z.) = ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = ۰.$$

قانون

فاصلهٔ نقطهٔ $(x., y., z.)$ از صفحهٔ $Ax + By + Cz + D = ۰$ برابر است با

$$d = \frac{|Ax. + By. + Cz. + D|}{\sqrt{A^۲ + B^۲ + C^۲}}.$$

نکته

برای یافتن معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ غیرهم‌خط، می‌توان بردار قائم را از ضرب خارجی دو بردار روی صفحه به دست آورد.

مثال

معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ $(۱,۰,۰)$، $(۰,۲,۰)$ و $(۰,۰,۳)$ را بنویسید.

پاسخ:

مثال

فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ از صفحهٔ $۲x-y+۲z-۵=۰$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ می‌گذرد و بردار قائم آن $(۲,-۱,۴)$ است.

پاسخ:

تمرین

فاصلهٔ مبدأ مختصات از صفحهٔ $x + ۲y + ۲z = ۹$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $(۲, ۳, ۴)$ بگذرد و با صفحهٔ xoy موازی باشد.

پاسخ:

تمرین

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از $(-۱, ۲, -۳)$ بگذرد و بر محور y عمود باشد.

پاسخ:

تمرین

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $(۱,۱,۱)$، $(۱,۰,۲)$ و $(۲,۱,۰)$ بگذرد.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

بردار قائم صفحهٔ $۳x - y + ۲z = ۵$ کدام است؟

۱) $(۵,۵,۵)$ ۲) $(۳,۱,۲)$ ۳) $(۱,-۳,۲)$ ۴) $(۳,-۱,۲)$

تست

فاصلهٔ مبدأ از صفحهٔ $۲x + ۳y + ۶z = ۱۴$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) $\frac{۱۴}{۱۱}$

تست

معادلهٔ صفحهٔ گذرا از $(۱,۱,۱)$ با بردار قائم $(۱,۱,۱)$ کدام است؟

۱) $x+y+z=۱$ ۲) $x+y+z=۳$ ۳) $x+y+z=۰$ ۴) $x+y+z=۶$

تست

کدام نقطه روی صفحهٔ $x+y+z=۶$ قرار دارد؟

۱) $(۱,۱,۱)$ ۲) $(۰,۰,۰)$ ۳) $(۱,۲,۳)$ ۴) $(۲,۲,۳)$

تست

معادلهٔ صفحهٔ xoy کدام است؟

۱) $x=۰$ ۲) $y=۰$ ۳) $z=۰$ ۴) $x+y=۰$

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۰,۳)$ از صفحهٔ $z=۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱

تمرین‌های پایان فصل

تمرین

فاصلهٔ دو نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ و $(۰,-۱,۴)$ را بیابید و مختصات وسط پاره‌خط را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

بردار $\overrightarrow{AB}$ را برای $A(۲,۰,-۱)$ و $B(-۱,۳,۲)$ بنویسید و بردار یکهٔ هم‌جهت با آن را پیدا کنید.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,۳)$، حاصل $\vec{a}+\vec{b}$، $\vec{a}-\vec{b}$ و $۳\vec{a}-۲\vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

شرط موازی بودن دو بردار $(۲,m,-۱)$ و $(۴,۶,n)$ را بنویسید و m و n را بیابید.

پاسخ:

تمرین

ضرب داخلی $\vec{a} = (۳, ۱, -۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۴, ۲)$ را حساب کنید و مشخص کنید آیا بر هم عمودند یا نه.

پاسخ:

تمرین

زاویهٔ بین دو بردار $(۱, ۱, ۱)$ و $(۱, -۱, ۰)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

$\vec{a} \times \vec{b}$ را برای $\vec{a} = (۲, ۰, ۱)$ و $\vec{b} = (۱, ۳, -۱)$ محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلث با رأس‌های $(۱, ۱, ۱)$، $(۲, ۰, ۳)$ و $(۰, ۲, ۱)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی $(۱, ۰, ۰)$، $(۰, ۱, ۱)$ و $(۱, ۱, ۰)$ را حساب کنید.

پاسخ:

تمرین

معادلات پارامتری و متقارن خط گذرنده از $(۰, ۱, ۲)$ با بردار هادی $(۱, -۱, ۲)$ را بنویسید.

پاسخ:

تمرین

معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از $(۱, ۰, ۰)$، $(۰, ۱, ۰)$ و $(۰, ۰, ۱)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

فاصلهٔ نقطهٔ $(۲, ۱, -۱)$ از صفحهٔ $x - ۲y + ۲z + ۴ = ۰$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین

نشان دهید دو خط

$$\frac{x}{۱} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z+۱}{-۱}, \qquad \frac{x-۲}{۲} = \frac{y}{۴} = \frac{z-۳}{-۲}$$

موازی‌اند ولی منطبق نیستند.

پاسخ:

تمرین

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از خط $\frac{z+۱}{-۱} = \frac{y}{۱} = \frac{x-۱}{۲}$ بگذرد و بر صفحهٔ $x + y + z = ۳$ عمود باشد.

پاسخ:

تمرین

ثابت کنید اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰$ و $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{۰}$ آنگاه حداقل یکی از دو بردار صفر است.

پاسخ:

تمرین

اگر $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰$ و $\vec{a} \neq \vec{۰}$، نشان دهید $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در صفحه‌ای عمود بر $\vec{a}$ قرار دارند.

پاسخ:

تمرین

مساحت تصویر متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی $\vec{a} = (۱, ۲, ۰)$ و $\vec{b} = (۰, ۱, ۱)$ روی صفحهٔ xy را بیابید.

پاسخ:

تست‌های جامع پایان فصل

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, ۲, ۲)$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۹ ۴) ۵

تست

وسط پاره‌خطی به دو سر $(۲, ۴, ۶)$ و $(۰, ۲, -۲)$ کدام است؟

۱) $(۱, ۳, ۴)$ ۲) $(-۱, -۱, -۴)$ ۳) $(۱, ۳, ۲)$ ۴) $(۲, ۶, ۴)$

تست

کدام نقطه روی محور yها قرار دارد؟

۱) $(۰, ۵, ۰)$ ۲) $(۵, ۰, ۰)$ ۳) $(۵, ۵, ۰)$ ۴) $(۰, ۵, ۵)$

تست

فاصلهٔ دو نقطهٔ $(۱, ۲, ۳)$ و $(۱, ۲, ۷)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

تست

اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ باشد، اندازهٔ $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۹}$ ۳) ۹ ۴) ۱

تست

بردار یکهٔ هم‌جهت با $(۰, ۳, ۴)$ کدام است؟

۱) $(۰, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵})$ ۲) $(۰, ۳, ۴)$ ۳) $(۰, \frac{۳}{۷}, \frac{۴}{۷})$ ۴) $(۰, ۱, ۱)$

تست

اگر دو بردار $(۳, ۴, ۵)$ و $(m - ۱, n + ۲, ۱۰)$ موازی باشند، m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

تست

حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}$ برای $\vec{a} = (۱, ۲, ۳)$ و $\vec{b} = (-۱, ۰, ۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) -۲

تست

شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار ناصفر کدام است؟

۱) ضرب خارجی صفر ۲) ضرب داخلی صفر ۳) اندازه‌ها برابر ۴) موازی بودن

تست

اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۴$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۶$، آنگاه $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) ۱۲ ۳) $\sqrt{۱۰۸}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

تست

مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $(۱,۰,۰)$ و $(۰,۲,۰)$ ساخته شده است کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

تست

مساحت مثلث با رأس‌های $(۰,۰,۰)$، $(۳,۰,۰)$ و $(۰,۴,۰)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱۲

تست

اگر ضرب مخلوط سه بردار صفر باشد، آن سه بردار چه وضعی دارند؟

۱) یکه‌اند ۲) دوبه‌دو عمودند ۳) موازی‌اند ۴) هم‌صفحه‌اند

تست

اگر $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -۱۲$ باشد، حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی آن‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴۴

تست

اگر ضرب مخلوط سه بردار ۱۲ باشد، حجم چهاروجهی ساخته‌شده روی آن‌ها کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۲

تست

بردار قائم صفحهٔ $۳x - y + ۲z = ۵$ کدام است؟

۱) $(۵,۵,۵)$ ۲) $(۳,۱,۲)$ ۳) $(۱,-۳,۲)$ ۴) $(۳,-۱,۲)$

تست

فاصلهٔ مبدأ از صفحهٔ $۲x + ۳y + ۶z = ۱۴$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) $\frac{۱۴}{۱۱}$

تست

معادلهٔ صفحهٔ گذرا از $(۱,۱,۱)$ با بردار قائم $(۱,۱,۱)$ کدام است؟

۱) $x+y+z=۱$ ۲) $x+y+z=۳$ ۳) $x+y+z=۰$ ۴) $x+y+z=۶$

تست

کدام نقطه روی صفحهٔ $x+y+z=۶$ قرار دارد؟

۱) $(۱,۱,۱)$ ۲) $(۰,۰,۰)$ ۳) $(۱,۲,۳)$ ۴) $(۲,۲,۳)$

تست

معادلات پارامتری خط گذرنده از $(۱,۰,۰)$ با بردار هادی $(۰,۱,۱)$ کدام است؟

۱) $x=۱,\ y=t,\ z=t$ ۲) $x=t,\ y=۱,\ z=۱$ ۳) $x=۱+t,\ y=t,\ z=t$ ۴) $x=t,\ y=t,\ z=۱$

تست

اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{۰}$ آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) حتماً $\vec{a}=\vec{۰}$ ۲) حتماً $\vec{a}\perp\vec{b}$ ۳) حتماً $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ۴) هیچ‌کدام

تست

حاصل $|\vec{i}\times\vec{j}|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

تست

اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ آنگاه زاویهٔ بین دو بردار کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

تست

بردار $\overrightarrow{AB}$ برای $A(۱,۲,۳)$ و $B(۴,۶,۸)$ کدام است؟

۱) $(۳,۴,۵)$ ۲) $(۵,۸,۱۱)$ ۳) $(-۳,-۴,-۵)$ ۴) $(۱,۲,۳)$

تست

اگر $\vec{a}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۰)$، آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\vec{k}$ ۲) $-\vec{k}$ ۳) $\vec{i}$ ۴) $\vec{j}$

تست

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست

معادلهٔ صفحهٔ xoy کدام است؟

۱) $x = ۰$ ۲) $y = ۰$ ۳) $z = ۰$ ۴) $x + y = ۰$

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $(۰, ۰, ۳)$ از صفحهٔ $z = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱

تست

اگر دو بردار موازی باشند، ضرب خارجی آن‌ها کدام است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) بردار یکه ۴) بسته به اندازه‌ها

تست

کدام عبارت برای ضرب داخلی درست است؟

۱) نتیجه همیشه بردار است ۲) نتیجه همیشه عدد است ۳) نتیجه همیشه مثبت است ۴) نتیجه همیشه صفر است

تست

اگر $\vec{a} = (۱, ۲, ۳)$ و $\vec{b} = (۲, ۴, ۶)$، آنگاه $\vec{a} \times \vec{b}$ کدام است؟

۱) $\vec{۰}$ ۲) $(۱, ۲, ۳)$ ۳) $(۲, ۴, ۶)$ ۴) $(-۱, -۲, -۳)$

تست

اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌صفحه باشند، $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) بستگی به اندازه‌ها دارد

تست

معادلهٔ خط گذرنده از $(۰,۰,۱)$ و موازی با $\vec{i}+\vec{j}$ کدام است؟

۱) $x=t,\ y=t,\ z=۱$ ۲) $x=t,\ y=t,\ z=t$ ۳) $x=۱,\ y=۱,\ z=t$ ۴) $x=t,\ y=۰,\ z=۱$

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ از صفحهٔ $x+y+z=۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

تست

اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ و $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۱$، آنگاه $|\vec{a}\times\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

نکته خارج از کتاب (مطالعه اختیاری)

در فیزیک و ریاضیات پیشرفته‌تر، فضاهای با بعد بالاتر از سه نیز بررسی می‌شوند.

نکته

فضای $\mathbb{R}^۴$: مجموعه همهٔ چهارتایی های مرتب (x,y,z,w) از اعداد حقیقی را فضای چهاربعدی یا $\mathbb{R}^۴$ می‌نامند. هر نقطه در این فضا با چهار مختص مشخص می‌شود.

در **نسبیت خاص** اینشتین، زمان به عنوان بعد چهارم در نظر گرفته می‌شود. هر رویداد با چهار عدد (x,y,z,t) توصیف می‌شود که سه عدد اول مکان و عدد چهارم زمان است. در این دیدگاه، فضا و زمان دیگر جدا نیستند و با هم **فضا-زمان** چهاربعدی را می‌سازند.

نکته

فضای $\mathbb{R}^n$: به طور کلی، مجموعه همهٔ n-تایی‌های مرتب $(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)$ از اعداد حقیقی را فضای n-بعدی یا $\mathbb{R}^n$ می‌نامند. مفاهیم فاصله، بردار، ضرب داخلی و بسیاری از خواص هندسی را می‌توان به این فضاها تعمیم داد. مطالعه این فضاها موضوع جبر خطی و هندسه تحلیلی پیشرفته است.