روابط طولی در مثلث

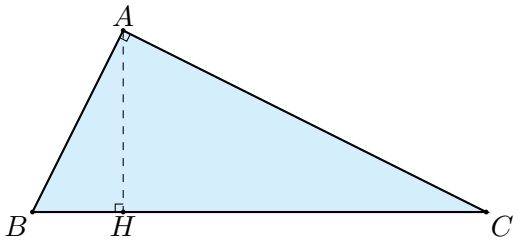
قضیهٔ سینوس‌ها

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

منظور از **روابط طولی**، رابطه‌هایی است که اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را در شکل‌های مختلف به هم مربوط می‌کنند. افزون بر رابطهٔ فیثاغورس ($a^۲ = b^۲ + c^۲$)، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با زاویهٔ قائمهٔ A و ارتفاع AH رابطه‌های زیر برقرارند:

قضیه

$$AB^۲ = BC \times BH, \qquad AH^۲ = BH \times HC,$$
$$AH \times BC = AB \times AC. \qquad AC^۲ = BC \times CH,$$



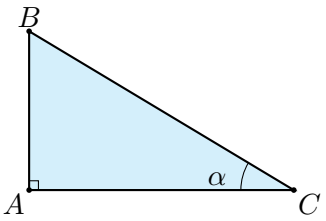
مثال

در مثلث قائم‌الزاویهٔ بالا $BH = ۲\,\text{cm}$ و $HC = ۸\,\text{cm}$ است. مساحت مثلث ABC را بیابید.

پاسخ:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با زاویهٔ قائمهٔ A و زاویهٔ تند α در رأس C، **نسبت‌های مثلثاتی** زاویهٔ α این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}, \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{BC}, \qquad \tan\alpha = \frac{AB}{AC}, \qquad \cot\alpha = \frac{AC}{AB}.$$



زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

تمرین

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم و $BH = ۳$ و $HC = ۱۲$ است. طول AH و AB و AC را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH رسم شده و $BH = ۴$ و $HC = ۹$ است. کدام AH است؟

۱) ۶ ۲) ۱۳ ۳) ۵ ۴) ۶.۵

پاسخ:

تست

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) داریم $BC = ۸$ و پای ارتفاع H چنان است که $BH = ۲$. AB کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) ۴

پاسخ:

تست

مقدار $\sin ۳۰^\circ + \cos ۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

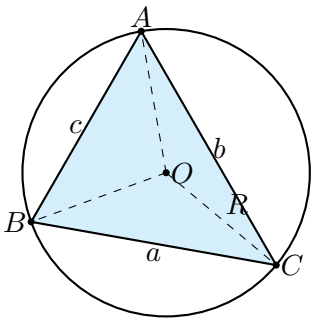
پاسخ:

قضیهٔ سینوس‌ها و نتایج آن

قضیهٔ سینوس‌ها

در هر مثلث، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابل آن مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت با قطر دایرهٔ محیطی مثلث برابر است:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R.$$



از نتایج قضیهٔ سینوس‌ها این است که در هر مثلث نسبت دو ضلع با نسبت سینوس زاویه‌های مقابل آن‌ها برابر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

همچنین اگر در مثلثی دو ضلع برابر نباشند، ضلع بزرگ‌تر روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر است و برعکس:

$$a > b \iff \frac{a}{b} > ۱ \iff \sin A > \sin B \iff A > B.$$

نکته

اگر رابطه‌ای هم‌درجه بین اندازهٔ ضلع‌های مثلث برقرار باشد، می‌توان به جای اندازهٔ هر ضلع، سینوس زاویهٔ مقابل آن را جایگذاری کرد و برعکس. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه از $a^۲ = b^۲ + c^۲$ نتیجه می‌شود $\sin^۲ A = \sin^۲ B + \sin^۲ C$. همچنین چون $a < b + c$، در هر مثلث $\sin A < \sin B + \sin C$.

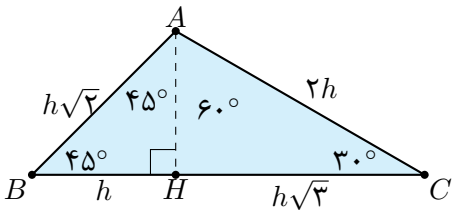
مثال

در مثلث ABC داریم $BC = ۲$، $\hat{B} = ۷۵^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$. طول AB را بیابید.

پاسخ:

نکته

اگر یکی از زاویه‌های مثلث ۷۵° یا ۱۰۵° باشد، برای محاسبهٔ اندازهٔ ضلع‌ها از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده نمی‌کنیم؛ بهتر است ارتفاع مناسب را رسم کنیم تا زاویه‌های ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° پدید آیند. برای مثال در مثلثی با $\hat{A} = ۱۰۵^\circ$، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ ارتفاع AH زاویهٔ A را به دو زاویهٔ ۴۵° و ۶۰° تقسیم می‌کند و اگر $AH = h$ باشد: $BH = h$ ، $HC = h\sqrt{۳}$ ، $AB = h\sqrt{۲}$ و $AC = ۲h$.



تمرین

در مثلثی $a = ۶$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است. شعاع دایرهٔ محیطی را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $b = ۴\sqrt{۲}$. طول ضلع c را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلثی $a = ۷$ و $b = ۵$ است. کدام زاویه (A یا B) بزرگ‌تر است؟ چرا؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلث ABC داریم $a = ۸$، $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$. b کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

پاسخ:

تست

در مثلثی $\sin A : \sin B : \sin C = ۳ : ۴ : ۵$ و محیط مثلث ۲۴ است. بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ:

تست

اگر در مثلثی $\sin A > \sin B$ باشد، کدام درست است؟

۱) $c > a$ ۲) $a = b$ ۳) $a > b$ ۴) $a < b$

پاسخ:

محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی

برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث دو روش اصلی وجود دارد:

۰. اگر اندازهٔ یک ضلع و زاویهٔ روبه‌روی آن معلوم باشد: $R = \frac{a}{۲\sin A}$؛

۰. اگر اندازهٔ هر سه ضلع معلوم باشد: ابتدا مساحت S را به دست می‌آوریم و سپس $R = \frac{abc}{۴S}$.

نکته

در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی نصف وتر است و در مثلث متساوی‌الاضلاع، شعاع دایرهٔ محیطی برابر $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع است. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a و r_b و r_c شعاع دایره‌های محاطی خارجی باشند، آن‌گاه

$$r_a + r_b + r_c = r + ۴R, \qquad \frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}.$$

پس با داشتن شعاع سه دایرهٔ محاطی می‌توان شعاع چهارمی را به دست آورد.

مثال

شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی با ضلع‌های ۵، ۵ و ۸ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی با ضلع‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

برای مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۳ و ۴ و ۵ درستی رابطهٔ $r_a + r_b + r_c = r + ۴R$ را بررسی کنید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی $a = ۵$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است. شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) ۱۰

پاسخ:

تست

شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و ۱۳ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶.۵ ۴) ۱۳

پاسخ:

تست

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ:

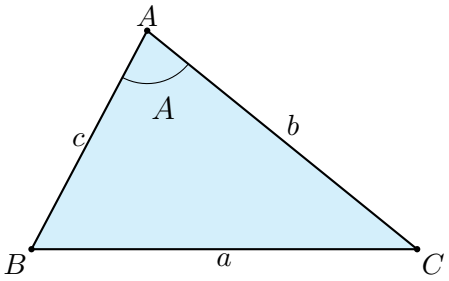
قضیهٔ کسینوس‌ها

قضیهٔ کسینوس‌ها و نتایج آن

قضیهٔ کسینوس‌ها

در هر مثلث، مربع هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر منهای حاصل‌ضرب دو برابر آن‌ها در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A.$$



اگر اندازهٔ سه ضلع مثلث معلوم باشد، کسینوس هر زاویه با جابه‌جا کردن اجزای قضیه به دست می‌آید:

$$\cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}.$$

مثال

ضلع‌های مثلثی با اعداد ۵، ۷ و ۸ متناسب‌اند. کسینوس زاویهٔ متوسط این مثلث کدام است؟

پاسخ:

قضیه

تشخیص نوع زاویه‌های مثلث:

$$a^۲ < b^۲ + c^۲ \iff A < ۹۰^\circ,$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \iff A = ۹۰^\circ,$$
$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \iff A > ۹۰^\circ.$$

نکته

اگر بخواهیم بدانیم مثلثی زاویهٔ منفرجه دارد یا نه، کافی است مربع بزرگ‌ترین ضلع را با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر مقایسه کنیم؛ زیرا اگر بزرگ‌ترین زاویه منفرجه نباشد، دو زاویهٔ دیگر قطعاً حاده‌اند.

مثال

در مثلث ABC ضلع‌ها $۲\sqrt{۲}$ و ۳ و $\sqrt{۵}$ هستند. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه چقدر است؟

پاسخ:

تمرین

در مثلثی با ضلع‌های $a = ۷$ و $b = ۵$ و $c = ۳$ زاویهٔ A چند درجه است؟

پاسخ:

تمرین

مثلثی با ضلع‌های ۴ و ۵ و ۶ حاده، قائمه یا منفرجه است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی $b = ۳$ و $c = ۵$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. a کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۹}$ ۲) $\sqrt{۳۴}$ ۳) ۴ ۴) ۷

پاسخ:

تست

کسینوس بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلثی با ضلع‌های ۵ و ۶ و ۷ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ:

تست

در مثلثی $a^۲ = b^۲ + c^۲ - \sqrt{۳}\,bc$ است. $\hat{A}$ کدام است؟

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۵۰° ۳) ۳۰° ۴) ۶۰°

پاسخ:

تست

مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۸ و ۹ چه نوع مثلثی است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) منفرجه‌الزاویه ۴) حاده‌الزوایا

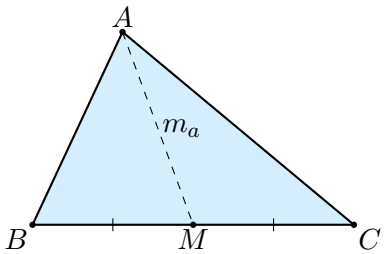
پاسخ:

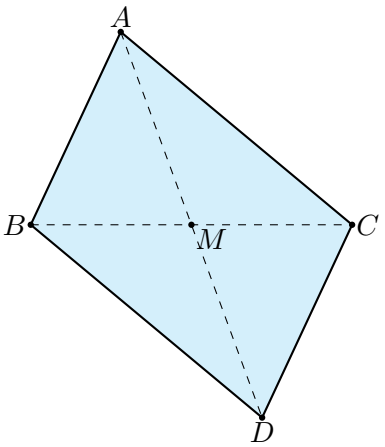
رابطهٔ طول میانه

قضیه

اگر M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد و $m_a = AM$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} = b^۲ + c^۲.$$





نکته

در هر مثلث، میانهٔ وارد بر ضلع بزرگ‌تر کوچک‌تر است و برعکس؛ یعنی کوتاه‌ترین میانه بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود. اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا D به دست آید، $ABDC$ متوازی‌الاضلاع می‌شود و رابطهٔ بالا از رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود که در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربع‌های دو قطر با مجموع مربع‌های چهار ضلع برابر است:

$$AD^۲ + BC^۲ = ۲(AB^۲ + AC^۲).$$

همچنین در هر مثلث، مجموع مربع‌های میانه‌ها برابر $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربع‌های ضلع‌هاست:

$$m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲ = \frac{۳}{۴}(a^۲ + b^۲ + c^۲).$$

مثال

طول کوتاه‌ترین میانهٔ مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۵ و ۳ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

طول میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و ۱۳ را با رابطهٔ میانه به‌دست آورید.

پاسخ:

تمرین

ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع ۵ و ۷ و یکی از قطرهایش ۸ است. طول قطر دیگر چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی با ضلع‌های ۴ و ۶ و ۸، طول میانهٔ وارد بر ضلع ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ:

تست

مجموع مربع‌های میانه‌های مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۸ و ۱۰ کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۰۰

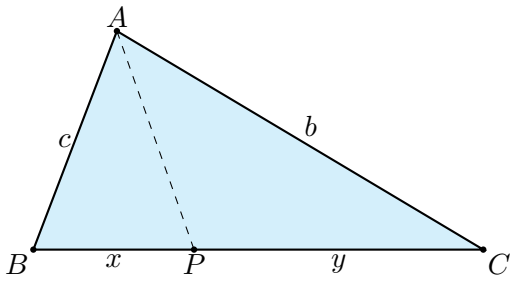
پاسخ:

رابطهٔ استوارت

رابطهٔ استوارت

در مثلث ABC نقطهٔ دلخواه P ضلع BC را به دو قطعهٔ $x = BP$ و $y = PC$ تقسیم می‌کند. اگر $c = AB$ و $b = AC$ باشد،

$$AP^{۲} = \frac{x\,b^{۲} + y\,c^{۲}}{x + y} - xy.$$



با رابطهٔ استوارت می‌توان طول هر پاره‌خطی را که رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع مقابل وصل می‌کند، به دست آورد.

مثال

در مثلث ABC با $AB = ۱۳$ و $AC = ۱۵$ و $BC = ۱۴$ نقطهٔ P روی BC چنان است که $BP = ۵$ و $PC = ۹$. طول AP را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلث ABC داریم $AB = ۷$ و $AC = ۸$ و $BC = ۹$. نقطهٔ P روی BC چنان است که $BP = ۳$ و $PC = ۶$. طول AP را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی $AB = ۵$ و $AC = ۷$ و $BC = ۶$ است. P وسط BC است. AP کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) ۶

پاسخ:

تست

اگر در رابطهٔ استوارت P وسط BC باشد، این رابطه به کدام رابطه تبدیل می‌شود؟

۱) رابطهٔ طول میانه ۲) رابطهٔ هرون ۳) قضیهٔ سینوس‌ها ۴) قضیهٔ نیمساز

پاسخ:

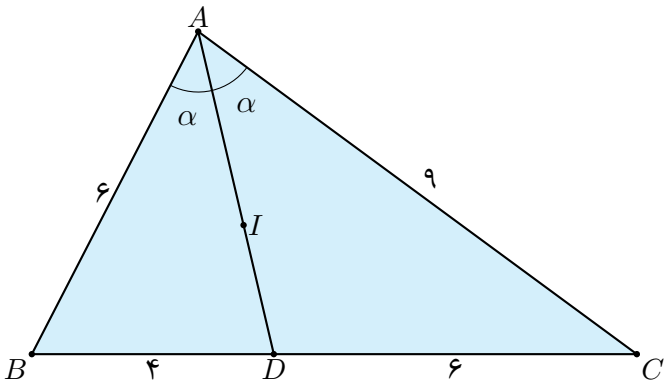
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

قضیهٔ نیمسازها

قضیهٔ نیمساز

در هر مثلث، نیمساز یک زاویهٔ داخلی ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت ضلع‌های مجاورش تقسیم می‌کند. اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$



در شکل بالا $AB = ۶$ و $AC = ۹$ است، پس $\frac{DB}{DC} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$ و چون $BC = ۱۰$، داریم $DB = ۴$ و $DC = ۶$.

قضیه

محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث، یعنی مرکز دایرهٔ محاطی I، هر نیمساز را به نسبت «مجموع دو ضلع مجاور» به «ضلع مقابل» تقسیم می‌کند. در شکل بالا

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

مثال

در مثلث ABC نقطهٔ I محل همرسی نیمسازهاست و $AI = ۳\,DI$ (D پای نیمساز A بر BC). اگر $BC = ۵$ باشد، محیط مثلث را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلثی با ضلع‌های $AB = ۱۰$ و $AC = ۱۵$ و $BC = ۲۰$ نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در D قطع می‌کند. BD و DC را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۶ و ۸ و ۱۰، مرکز دایرهٔ محاطی I و پای نیمساز زاویهٔ مقابل به وتر D است. نسبت $\frac{AI}{ID}$ را بیابید (A رأس روبه‌رو به وتر).

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلث ABC با $AB = ۶$ و $AC = ۹$ و $BC = ۱۰$، نیمساز A ضلع BC را در D قطع می‌کند. BD کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

تست

نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در D قطع می‌کند. اگر $AB = ۸$ و $AC = ۱۲$ و $BD = ۶$ باشد، BC کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

در مثلثی $a = ۷$ و $b = ۵$ و $c = ۹$ است. I مرکز دایرهٔ محاطی و D پای نیمساز A است. $\frac{AI}{ID}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ:

نیمساز و تقسیم مساحت

نیمساز هر زاویهٔ داخلی، مساحت مثلث را به نسبت دو ضلع مجاور همان زاویه تقسیم می‌کند:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}.$$

اگر I محل همرسی نیمسازها باشد، مساحت سه مثلث IBC و ICA و IAB به نسبت اندازهٔ ضلع‌های مقابل (a و b و c) است، زیرا ارتفاع هر سه مثلث (شعاع دایرهٔ محاطی) برابر است. بنابراین

$$\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} = \frac{a}{a+b+c}.$$

مثال

در مثلثی با ضلع‌های ۳ و ۴ و ۵، مرکز دایرهٔ محاطی I را به سه رأس وصل کرده‌ایم. مساحت مثلث IBC (روبه‌روی ضلع ۳) چه کسری از مساحت مثلث اصلی است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

AD نیمساز زاویهٔ A است و $AB = ۶$ و $AC = ۱۰$. نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ:

تست

I مرکز دایرهٔ محاطی مثلثی با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و ۱۳ است. مساحت مثلث IBC ($BC = ۵$) چه کسری از مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ:

رابطهٔ طول نیمساز

قضیه

اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد و $x = BD$ و $y = DC$،

$$AD^۲ = bc - xy.$$

یعنی مربع طول نیمساز برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور منهای حاصل‌ضرب دو قطعهٔ ایجادشده روی ضلع سوم.

نکته

اگر سه ضلع مثلث معلوم باشد، ابتدا با قضیهٔ نیمساز x و y را به دست می‌آوریم و سپس طول نیمساز را می‌یابیم.
اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد، طول نیمساز زاویهٔ A از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d_a = \cos\frac{A}{۲} \times \frac{۲bc}{b+c}.$$

زاویهٔ رأس	$\hat{A} = ۱۲۰^\circ$	$\hat{A} = ۹۰^\circ$	$\hat{A} = ۶۰^\circ$
طول نیمساز	$d_a = \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \sqrt{۲}\frac{bc}{b+c}$	$d_a = \sqrt{۳}\frac{bc}{b+c}$

مثال

در مثلثی با ضلع‌های $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۵$ طول نیمساز زاویهٔ A را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلثی با ضلع‌های $AB = ۱۰$ و $AC = ۱۵$ و $BC = ۲۰$ طول نیمساز AD از زاویهٔ A را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۳ و زاویهٔ بین آن‌ها ۱۲۰°، طول نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلث ABC داریم $AB = ۳$ و $AC = ۶$ و $BC = ۶$. طول نیمساز AD کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) ۴

پاسخ:

تست

در مثلثی با $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $b = ۳$ و $c = ۶$، طول نیمساز زاویهٔ A کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ:

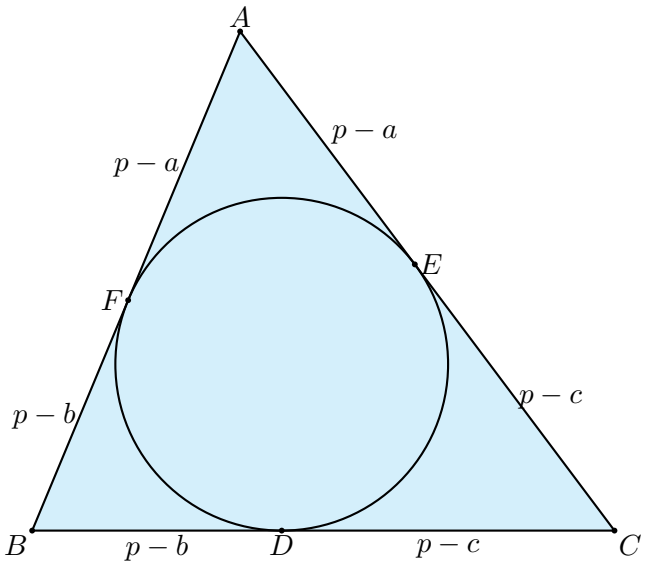
قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

رابطهٔ هرون

رابطهٔ هرون

اگر a و b و c ضلع‌های مثلث و $p = \frac{a+b+c}{۲}$ نیم‌محیط آن باشد، مساحت مثلث برابر است با

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



نکته

در بیشتر موارد، رابطهٔ هرون را در مثلث‌هایی به کار می‌بریم که اندازهٔ ضلع‌های آن‌ها عددی رادیکالی نباشد. اگر مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ قائمهٔ A باشد: اگر محیط و وتر معلوم باشد $S = p(p-a)$ و اگر قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی روی وتر معلوم باشد $S = (p-b)(p-c)$.

مثال

مساحت مثلثی را بیابید که اندازهٔ ضلع‌های آن ۱۳ cm و ۱۴ cm و ۱۵ cm است.

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلثی با ضلع‌های ۷ و ۱۵ و ۲۰ را با رابطهٔ هرون بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۲۵ و ۲۹ کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۹۰ ۳) ۷۲ ۴) ۶۰

پاسخ:

تست

مساحت مثلثی با ضلع‌های ۹ و ۱۰ و ۱۷ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۷۲ ۴) ۳۶

پاسخ:

محاسبهٔ مساحت بدون هرون

اگر اندازهٔ حداقل یکی از ضلع‌های مثلث عددی رادیکالی باشد، ابتدا با رابطهٔ فیثاغورس بررسی می‌کنیم که مثلث قائم‌الزاویه است یا نه:

- اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، مساحت نصف حاصل‌ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه است؛
- اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، ارتفاع وارد بر قاعده را با فیثاغورس می‌یابیم و مساحت را حساب می‌کنیم؛
- اگر مثلث نه قائم‌الزاویه و نه متساوی‌الساقین باشد، با قضیهٔ کسینوس‌ها کسینوس زاویه‌ای را که روبه‌روی ضلعی با اندازهٔ عددی است حساب می‌کنیم و با $\sin^2 A+\cos^2 A = 1$ مقدار $\sin A$ را می‌یابیم و در انتها از $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ استفاده می‌کنیم.

تست‌های این بخش

تست

مساحت مثلث متساوی‌الساقینی با ضلع‌های ۵ و ۵ و ۶ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

پاسخ:

تست

مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی که طول هر ساق آن $3\sqrt{2}$ است، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ:

محاسبهٔ ارتفاع

اگر سه ضلع مثلث معلوم باشد و یکی از ارتفاع‌ها خواسته شود، ابتدا مساحت را با هرون به دست می‌آوریم و سپس

$$h_a = \frac{2S}{a}, \qquad h_b = \frac{2S}{b}, \qquad h_c = \frac{2S}{c}.$$

اگر یکی از ضلع‌ها عددی رادیکالی باشد، با قضیهٔ کسینوس‌ها کسینوس $\hat{B}$ یا $\hat{C}$ را حساب می‌کنیم و از رابطه‌های $AH = c\sin B$ و $AH = b\sin C$ ارتفاع را می‌یابیم.

مثال

در مثلثی با ضلع‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵، طول بلندترین ارتفاع را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

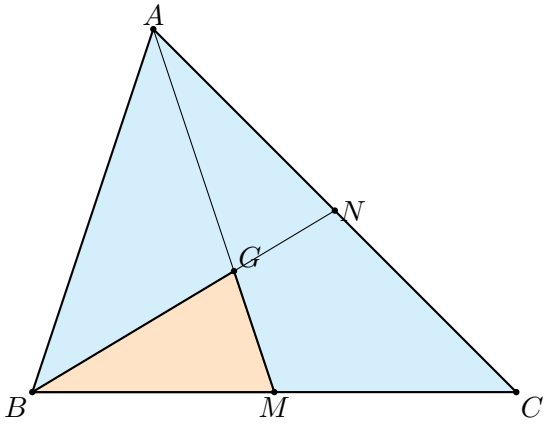
در مثلثی با ضلع‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵، ارتفاع وارد بر ضلع ۱۵ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $\frac{۵۶}{۵}$ ۳) ۱۳ ۴) $\frac{۱۶۸}{۱۳}$

پاسخ:

مساحت با دو ضلع و یک میانه یا یک ضلع و دو میانه

- اگر طول دو ضلع و یکی از میانه‌ها معلوم باشد، مثلث AMC سه ضلع معلوم دارد. چون M وسط BC است، $S_{ABC} = ۲S_{AMC}$.
- اگر دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم معلوم باشد، میانه را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید و $S_{ABC} = S_{ABA'}$.
- اگر دو میانه و ضلع نظیر یکی از آن‌ها معلوم باشد، مثلث BGM سه ضلع معلوم دارد (G محل برخورد میانه‌ها) و $S_{ABC} = ۶S_{BGM}$.
- اگر دو میانه و ضلع سوم معلوم باشد، مثلث BGC سه ضلع معلوم دارد و $S_{ABC} = ۳S_{BGC}$.



مثال

در مثلث ABC داریم $BC = ۸$، $m_a = ۹$ و $m_b = \frac{۱۵}{۲}$. مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$BC = ۱۰$ و $m_a = ۳۶$ و $m_b = ۱۹.۵$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۶۰

پاسخ:

تست

M وسط BC است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMC است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ:

مساحت با معلوم بودن سه میانه

اگر اندازهٔ میانه‌های مثلث ABC را به عنوان اندازهٔ ضلع‌های مثلثی دیگر در نظر بگیریم و مساحت آن را S' بنامیم، مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۴}{۳}S'$ است:

$$S_{ABC} = \frac{۴}{۳} S'.$$

مثال

میانه‌های یک مثلث ۹ و ۱۲ و ۱۵ هستند. مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

تمرین

میانه‌های مثلثی ۳ و ۴ و ۵ هستند. مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

میانه‌های مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ هستند. مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

پاسخ:

تست

میانه‌های مثلثی ۵ و ۵ و ۶ هستند. مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

پاسخ:

ارتباط مساحت و شعاع‌های دایره‌های محاطی و محیطی

اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مقابل به A و R شعاع دایرهٔ محیطی باشد:

$$r = \frac{S}{p}, \qquad r_a = \frac{S}{p-a}, \qquad R = \frac{abc}{۴S}.$$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که $S = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$ و همچنین $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$.

مثال

شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلثی ۲ و ۳ و ۶ است. مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

تمرین

برای مثلثی با ضلع‌های ۱۰ و ۱۰ و ۱۲ مساحت، شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت مثلثی ۳۰ و نیم‌محیط آن ۱۵ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ:

تست

شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلثی ۳ و ۶ و ۶ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

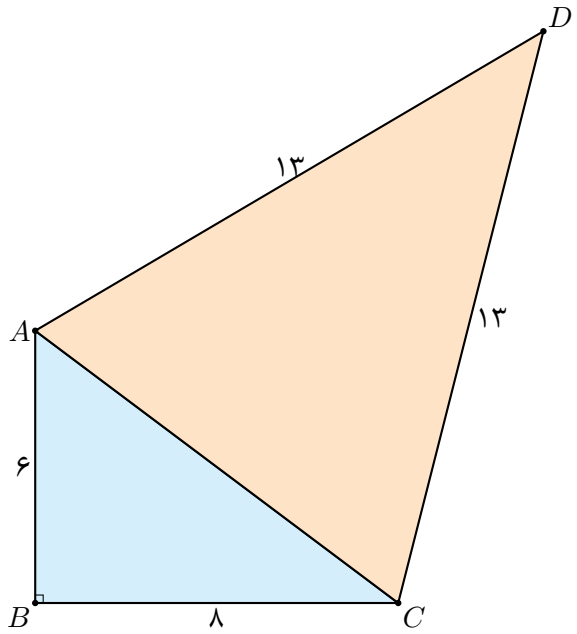
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ:

مساحت چهارضلعی

اگر در چهارضلعی بتوان طول یک قطر را به دست آورد، چهارضلعی را با آن قطر به دو مثلث تقسیم می‌کنیم و مساحت هر قسمت را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$S = S_۱ + S_۲.$$



مثال

در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\hat{B} = ۹۰^\circ$، $AB = ۶$، $BC = ۸$ و $AD = CD = ۱۳$. مساحت چهارضلعی را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در چهارضلعی $ABCD$ داریم $AB = BC = ۵$ و $AC = ۶$ و $CD = ۸$ و $AD = ۱۰$. مساحت آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۲۴

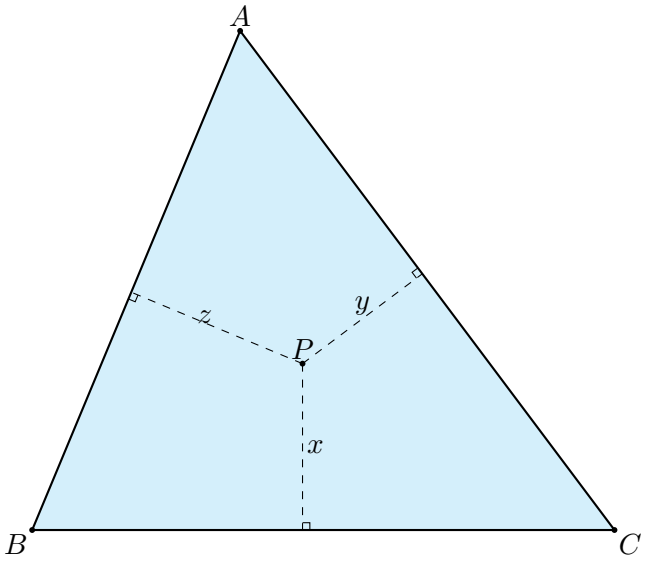
پاسخ:

ارتفاع و مساحت: دو نکته

قضیه

۰. اگر P نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد و فاصله‌هایش از ضلع‌های a و b و c به ترتیب x و y و z باشد، $S = \frac{ax + by + cz}{۲}$.

۰. در مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع است: $x+y+z = h$.



مثال

در مثلثی با ضلع‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵، نقطهٔ P درون مثلث از دو ضلع ۱۳ و ۱۴ به یک فاصلهٔ ۲ است. فاصلهٔ P از ضلع ۱۵ چقدر است؟

پاسخ:

تمرین

در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶، نقطه‌ای درون مثلث از دو ضلع به فاصله‌های ۱ و ۱.۵ است. فاصلهٔ آن از ضلع سوم چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۴ از سه ضلع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ:

تست

در مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۸ و ۱۰، نقطه‌ای درون مثلث از ضلع‌های ۶ و ۸ به ترتیب به فاصله‌های ۱ و ۲ است. فاصلهٔ آن نقطه از ضلع ۱۰ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) ۳

پاسخ:

مساحت سینوسی و مساحت متوازی‌الاضلاع

در هر مثلثی که اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد، مساحت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin A = \frac{۱}{۲}ac\sin B = \frac{۱}{۲}ab\sin C.$$

بنابراین اگر دو ضلع مثلثی معلوم باشد، بیشترین مساحت زمانی است که زاویهٔ بین آن دو ضلع قائمه باشد. مساحت متوازی‌الاضلاع با ضلع‌های a و b و زاویهٔ α برابر $S = ab\sin\alpha$ و با قطرهای c و d و زاویهٔ θ بین آن‌ها برابر $S = \frac{۱}{۲}cd\sin\theta$ است.

مثال

در مثلث ABC داریم $\hat{B}+\hat{C}=۱۵۰^\circ$ و $AC=۸$ و $AB=۵$. مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلثی با ضلع‌های ۶ و ۱۰ و زاویهٔ ۳۰° بین آن‌ها چقدر است؟

پاسخ:

تمرین

مساحت متوازی‌الاضلاعی با ضلع‌های ۴ و ۶ و زاویهٔ ۱۵۰° را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت مثلثی با ضلع‌های ۸ و ۵ و زاویهٔ ۳۰° بین آن‌ها کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) $۲۰\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

پاسخ:

تست

بیشترین مساحت مثلثی که طول دو ضلع آن ۶ و ۱۰ است، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) $۳۰\sqrt{۳}$

پاسخ:

تست

مساحت متوازی‌الاضلاعی با ضلع‌های ۵ و ۸ و زاویهٔ ۳۰° کدام است؟

۱) $۲۰\sqrt{۳}$ ۲) ۴۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

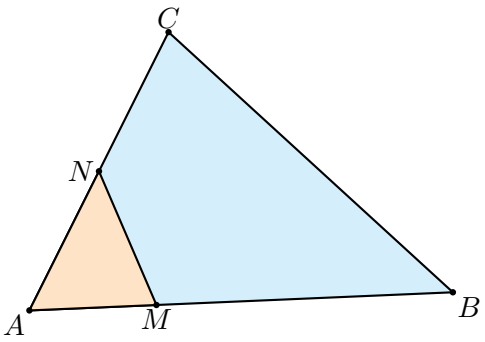
پاسخ:

نسبت مساحت دو مثلث با یک زاویهٔ برابر

قضیه

اگر دو مثلث یک زاویهٔ برابر داشته باشند، نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت حاصل‌ضرب اندازه‌های اضلاع همان زاویه در دو مثلث است. اگر M روی AB و N روی AC باشد و $AM = x$ و $AN = y$ و $AB = c$ و $AC = b$،

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{xy}{bc}.$$



مثال

در مثلث ABC داریم $AB = ۶$ و $AC = ۹$ و نقاط M و N روی AB و AC چنان‌اند که $AM = ۲$ و $AN = ۳$. نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC را بیابید.

پاسخ:

تمرین

در مثلث ABC نقطه‌های M روی AB و N روی AC چنان‌اند که $\frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۳}$ و $\frac{AN}{AC} = \frac{۲}{۵}$. نسبت $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$ را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

M روی AB و N روی AC است و $\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۳}$. نسبت $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ:

تست

$AM=۲$ و $AB=۸$ و $AN=۳$ و $AC=۶$ است. نسبت $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: