ماتریس و کاربردها

در این فصل با مفهوم ماتریس، انواع آن، عملیات جبری روی ماتریس‌ها، دترمینان، ماتریس وارون و کاربرد آن‌ها در حل دستگاه معادلات و هندسه آشنا می‌شویم.

مفهوم ماتریس

تعریف

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که شامل تعدادی سطر و ستون باشد را یک **ماتریس** می‌نامیم. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را **درایه** آن ماتریس می‌نامیم.

اگر ماتریسی m سطر و n ستون داشته باشد، آن را به صورت $[a_{ij}]_{m\times n}$ تعریف می‌کنیم که در آن $i = ۱, ۲, \dots, m$ و $j = ۱, ۲, \dots, n$ است و a_{ij} درایه‌ای است که در سطر iام و ستون jام قرار دارد. به $m \times n$ **مرتبهٔ** ماتریس می‌گوییم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

نکته

در ماتریس A برای محاسبهٔ درایهٔ a_{ij} کافی است به جای i و j مقادیر عددی آن‌ها را جایگزین کنیم.

مثال

اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times ۳}$ و $a_{ij} = i + ۲j$ باشد، ماتریس A را محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۲}$ و

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i < j \\ i + j & i \geq j \end{cases}$$

باشد، ماتریس A را محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & i < j \\ ۰ & i = j \\ i - j & i > j \end{cases}$$

باشد، ماتریس A را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین ۱

اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به‌طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = ۷$، برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = ۲i$، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ:

تمرین ۲

ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times۴}$ با ضابطهٔ $a_{ij} = i^{۲} - ۳j$ را بنویسید.

پاسخ:

تمرین ۳

ماتریس $B = [b_{ij}]_{۴\times۳}$ را طوری بنویسید که $b_{ij} = |i - j|$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ با ضابطهٔ $a_{ij}=۲i-j$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۱ & ۰\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۳ & ۱ & -۱\end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{pmatrix}$

پاسخ:

تست

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $a_{ij}=i^{۲}-j$ باشد، درایهٔ $a_{۳۲}$ برابر است با:

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ:

تست

یک ماتریس با ۱۲ درایه چند مرتبهٔ مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ:

تست

اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ و $a_{ij} = i - j$ باشد، مجموع همهٔ درایه‌های A کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۳

پاسخ:

انواع ماتریس

تعریف

- **ماتریس سطری**: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مثال: $A = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ از مرتبهٔ ۱×۳.
- **ماتریس ستونی**: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مثال: $B = \begin{pmatrix} ۵ \\ ۲ \\ -۷ \end{pmatrix}$ از مرتبهٔ ۳×۱.
- **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد. آن را با نماد O نشان می‌دهیم.
- **ماتریس مربعی**: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشد. ماتریس مربعی A از مرتبهٔ n را با $A_{n\times n}$ نشان می‌دهیم.

در ماتریس مربعی، درایه‌های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}$ را درایه‌های **قطر اصلی** و قطر دیگر را **قطر فرعی** می‌نامیم.

قانون

- a_{ij} روی قطر اصلی است اگر و تنها اگر $i = j$.
- a_{ij} روی قطر فرعی است اگر و تنها اگر $i + j = n + ۱$.

تعریف

- **اثر ماتریس** ($\mathrm{tr}(A)$ یا $\mathrm{trace}(A)$): مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس مربعی.
- **ماتریس قطری**: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.
- **ماتریس اسکالر**: ماتریس قطری که تمام درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر باشند.
- **ماتریس همانی** (واحد) I یا I_n: ماتریس اسکالری که درایه‌های قطر اصلی آن همگی ۱ باشند.

- **ماتریس مثلثی بالا**: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند.
- **ماتریس مثلثی پایین**: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشند.
- **ماتریس متقارن**: ماتریس مربعی با $A = A^T$.
- **ماتریس پادمتقارن**: ماتریس مربعی با $A = -A^T$.

مثال

ماتریس‌های زیر را از نظر نوع مشخص کنید و اثر آن‌هایی که مربعی‌اند را بیابید:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۰ & ۴ \\ ۱ & -۴ & ۰ \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix}$$

پاسخ:

مثال

نشان دهید در هر ماتریس پادمتقارن، درایه‌های قطر اصلی صفرند.

پاسخ:

تمرین ۴

یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ مثال بزنید که هم مثلثی بالا و هم مثلثی پایین باشد. آیا چنین ماتریسی لزوماً قطری است؟

پاسخ:

تمرین ۵

اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متقارن باشد، چه رابطه‌ای بین درایه‌ها برقرار است؟ اگر پادمتقارن باشد چطور؟

پاسخ:

تمرین ۶

ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & x & -۱ \\ ۳ & ۰ & y \\ z & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ را طوری کامل کنید که متقارن شود.

پاسخ:

تمرین ۷

ماتریس $B = \begin{pmatrix} ۰ & a & b \\ c & ۰ & d \\ e & f & ۰ \end{pmatrix}$ را طوری کامل کنید که پادمتقارن شود.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

کدام‌یک ماتریس قطری است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix}$

پاسخ:

تست

اثر ماتریس $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & ۴ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ:

تست

ماتریس $\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۵ & ۳ \end{pmatrix}$ کدام نوع است؟

۱) متقارن ۲) پادمتقارن ۳) قطری ۴) اسکالر

پاسخ:

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ باشد، A کدام است؟

۱) فقط قطری ۲) فقط اسکالر ۳) قطری و اسکالر ۴) همانی

پاسخ:

تساوی، جمع و ضرب عدد در ماتریس

تعریف

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را برابر می‌گوییم ($A=B$) هرگاه برای همهٔ i و j داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$. دو ماتریس فقط وقتی می‌توانند برابر باشند که هم‌مرتبه باشند.

مثال

اگر $\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+۱ & ۲ \\ ۳ & y-۱ \end{pmatrix}$ باشد، x و y را بیابید.

پاسخ:

تمرین ۸

اگر $\begin{pmatrix} ۳ & ۳ \\ -۴ & z \\ ۵ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x & ۳ \\ y+۱ & -۱ \end{pmatrix}$ باشد، x، y و z را پیدا کنید.

پاسخ:

تعریف

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ هم‌مرتبه باشند:

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n} \qquad A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n},$$

قانون

خواص جمع (برای ماتریس‌های هم‌مرتبه):

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $A+O=O+A=A$
- $A+(-A)=(-A)+A=O$
- اگر $A+C=B+C$ آنگاه $A=B$

تعریف

اگر $k\in\mathbb{R}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ باشد: $kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$.

قانون

خواص ضرب عدد در ماتریس:

- $r(sA)=s(rA)=(rs)A$
- $r(A+B)=rA+rB$
- $(r+s)A=rA+sA$
- اگر $r\neq 0$ و $rA=rB$ آنگاه $A=B$

مثال

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & -۳\\ ۲ & ۰\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۵ & ۴\\ ۳ & -۱\end{pmatrix}$ باشند، حاصل $-۲A+۳B$ را بیابید.

پاسخ:

مثال

ماتریس X را از معادلهٔ $\begin{pmatrix}۵ & ۶\\ ۱ & -۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۴\end{pmatrix}-۳X$ پیدا کنید.

پاسخ:

تمرین ۹

اگر $A=\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۰ & ۳\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}$ باشند، ماتریس X را از $۲A-X=B$ پیدا کنید.

پاسخ:

تمرین ۱۰

اگر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & -۱ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۰ & -۲ & ۱ \\ ۵ & ۱ & -۳ \end{pmatrix}$ باشند، $۳A-۲B$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۴ & ۱ \\ ۵ & -۲ \end{pmatrix}$ باشند، درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس $۳A-۲B$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۵ ۳) ۱ ۴) ۷

پاسخ:

تست

اگر $\begin{pmatrix} ۵ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & ۲ \\ -۱ & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

پاسخ:

تست

ماتریس X از معادلهٔ $\begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = ۲X + \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$

پاسخ:

ضرب ماتریس‌ها

تعریف

دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ را می‌توان در هم ضرب کرد. حاصل AB از مرتبهٔ $m \times p$ است و

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

شرط ضرب: تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد.

مثال

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۳ & ۱\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۴\end{pmatrix}$ باشند، AB را محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

اگر $A=\begin{pmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۵ & ۲ & -۴\end{pmatrix}$ باشند، AB و BA را محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

اگر $A=\begin{pmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۰\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۰\end{pmatrix}$ باشند، AB و BA را محاسبه کنید و نشان دهید در حالت کلی $AB\neq BA$.

پاسخ:

قانون

گزاره‌هایی دربارهٔ ضرب ماتریس‌ها:

- در حالت کلی $AB \neq BA$ (جابه‌جایی برقرار نیست).
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
- فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند: $A^{۲} = A \cdot A$، $A^{۳} = A^{۲} \cdot A$ و ...
- از $AB = O$ لزوماً $A = O$ یا $B = O$ نتیجه نمی‌شود.
- از $AB = AC$ لزوماً $B = C$ نتیجه نمی‌شود (قاعدهٔ حذف برقرار نیست).

مثال

نشان دهید اگر $ad = bc$ آنگاه

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه دو ماتریس ناصفر می‌توانند حاصل‌ضرب صفر داشته باشند.

پاسخ:

تمرین ۱۱

اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد، در هر حالت مشخص کنید AB و BA قابل تعریف‌اند یا نه و در صورت تعریف مرتبه را بنویسید:

آ) $B_{۳\times ۲}$

ب) $B_{۳\times ۵}$

ج) $B_{۵\times ۳}$

د) $B_{۵\times ۴}$

ه) $B_{۵\times ۵}$

پاسخ:

تمرین ۱۲

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ باشند، در صورت امکان AB و BA را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین ۱۳

دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A \neq O$ و $B \neq O$ ولی $AB = O$.

پاسخ:

تمرین ۱۴

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}$ باشند، AB و AC را محاسبه کنید و با هم مقایسه کنید.

پاسخ:

تمرین ۱۵

اگر $A=\begin{pmatrix} a & -۱ \\ ۱ & a \end{pmatrix}$ و $A^۲=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ باشند، درایهٔ $(AB)_{۲۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ:

تست

کدام گزاره درست است؟

۱) ضرب ماتریس‌ها همیشه جابه‌جایی است

۲) اگر $AB = O$ آنگاه $A = O$ یا $B = O$

۳) اثر AB با اثر BA برابر است

۴) هر ماتریس را می‌توان به توان رساند

پاسخ:

تست

اگر A از مرتبهٔ ۳×۲ و B از مرتبهٔ ۲×۳ باشند، مرتبهٔ BA کدام است؟

۱) ۲×۲

۲) ۳×۳

۳) ۲×۳

۴) قابل تعریف نیست

پاسخ:

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A

۲) I

۳) $-I$

۴) $-A$

پاسخ:

ترانهاده ماتریس

تعریف

ترانهاده ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی از مرتبهٔ $n \times m$ است که با جابه‌جا کردن سطرها و ستون‌های A به دست می‌آید و با A^T نشان داده می‌شود. درایهٔ سطر i و ستون j ماتریس A^T برابر a_{ji} است.

مثال

اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ & -۳ \end{pmatrix}$ باشد، A^T را بنویسید.

پاسخ:

قانون

خواص ترانهاده:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- A متقارن است $\iff A = A^T$
- A پادمتقارن است $\iff A = -A^T$

تمرین ۱۶

اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، $(A^T)^T$ و در صورت امکان A^TA و AA^T را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین ۱۷

اگر A متقارن و B پادمتقارن باشد، نشان دهید $A+B$ متقارن است اگر و تنها اگر $B=O$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۳ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون اول A^T کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ:

تست

اگر A متقارن و B پادمتقارن باشد و $A+B$ نیز متقارن باشد، کدام نتیجه درست است؟

۱) $B=O$ ۲) $A=O$ ۳) $A=B$ ۴) $B=-A$

پاسخ:

دترمینان

دترمینان ماتریس ۲ × ۲

تعریف

برای $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A)=|A|=ad-bc.$$

مثال

دترمینان ماتریس‌های $\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۵ & ۲ \\ -۳ & ۰ \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

دترمینان ماتریس ۳×۳

بسط روی سطر اول:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۱۱}(a_{۲۲}a_{۳۳} - a_{۲۳}a_{۳۲}) - a_{۱۲}(a_{۲۱}a_{۳۳} - a_{۲۳}a_{۳۱}) + a_{۱۳}(a_{۲۱}a_{۳۲} - a_{۲۲}a_{۳۱}).$$

نکته

روش ساروس: دو ستون اول را کنار دترمینان تکرار کنید، حاصل‌ضرب قطرهای اصلی را جمع و حاصل‌ضرب قطرهای فرعی را کم کنید.

مثال

دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$ را هم با بسط و هم با روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

قانون

خواص دترمینان:

- $\det(A^T) = \det(A)$
- جابه‌جایی دو سطر (یا دو ستون) علامت دترمینان را عوض می‌کند.
- اگر دو سطر (یا دو ستون) متناسب باشند، دترمینان صفر است.
- ضرب یک سطر (یا ستون) در k، دترمینان را در k ضرب می‌کند.
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- برای ماتریس $n \times n$: $\det(kA) = k^n \det(A)$
- دترمینان ماتریس مثلثی یا قطری برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

تمرین ۱۸

مقدار x را از $\begin{vmatrix} x & ۲ \\ ۳ & x \end{vmatrix} = ۵$ بیابید.

پاسخ:

تمرین ۱۹

اگر $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ۵$ باشد، $\det \begin{pmatrix} ۲a & ۲b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $\det \begin{pmatrix} a & b \\ ۳c & ۳d \end{pmatrix}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین ۲۰

دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین ۲۱

نشان دهید اگر دو سطر یک ماتریس ۳×۳ یکسان باشند، دترمینان آن صفر است.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

دترمینان $\begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) -۱۴ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

پاسخ:

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد، $\det(۲A)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۸ ۳) -۲ ۴) ۴

پاسخ:

تست

دترمینان ماتریس مثلثی بالا $\begin{pmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱۵ ۲) ۱۵ ۳) -۱۲ ۴) ۰

پاسخ:

تست

اگر $\det(A) = ۳$ و $\det(B) = -۲$ برای ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه، $\det(AB)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۵ ۴) ۱

پاسخ:

ماتریس وارون

تعریف

ماتریس مربعی A را **وارون‌پذیر** (نامنفرد) می‌گوییم هرگاه ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که $AB = BA = I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

قضیه

ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq ۰$.

وارون ماتریس ۲ × ۲

اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $\Delta = ad - bc \neq ۰$، آنگاه

$$A^{-۱} = \frac{۱}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ماتریس $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ را ماتریس **الحاقی** A می‌نامیم و با A^* نشان می‌دهیم؛ پس $A^{-۱} = \frac{۱}{\det(A)} A^*$.

مثال

وارون $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix}$ را بیابید و با ضرب بررسی کنید که $AA^{-۱} = I$.

پاسخ:

مثال

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{-۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

مثال

ماتریس A را چنان بیابید که $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix}$.

پاسخ:

قانون

خواص وارون:

- $(A^{-۱})^{-۱} = A$
- $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$
- $(A^T)^{-۱} = (A^{-۱})^T$
- $\det(A^{-۱}) = \dfrac{۱}{\det(A)}$
- $(k \neq ۰)\ (kA)^{-۱} = \dfrac{۱}{k}A^{-۱}$

تمرین ۲۲

وارون ماتریس $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{pmatrix}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین ۲۳

اگر A ماتریس ۲×۲ وارون‌پذیر باشد و $A + A^{-۱} = ۴I$، حاصل $A^{۲} + A^{-۲}$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین ۲۴

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{-۱}$ و سپس $(A^T)^{-۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

تمرین ۲۵

نشان دهید اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه A^T نیز وارون‌پذیر است و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

وارون ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۵ & ۳ \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ -۵ & ۳ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۵ & ۳ \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ \end{pmatrix}$

پاسخ:

تست

اگر $\det(A) = ۴$ باشد، $\det(A^{-۱})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ:

تست

کدام ماتریس وارون‌پذیر نیست؟

۱) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$

پاسخ:

تست

اگر $A^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ باشد، A کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

پاسخ:

دستگاه معادلات خطی و ماتریس

دستگاه

$$\begin{cases} a_۱x + b_۱y = c_۱ \\ a_۲x + b_۲y = c_۲ \end{cases}$$

را می‌توان به صورت $AX = B$ نوشت که در آن

$$A = \begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{pmatrix}.$$

اگر $\det(A) \neq ۰$، دستگاه جواب یکتا دارد و $X = A^{-۱}B$.

مثال

دستگاه $\begin{cases} ۲x + y = ۵ \\ x - ۳y = ۱ \end{cases}$ را با روش ماتریسی حل کنید.

پاسخ:

مثال

دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۲y = ۴ \\ x + y = ۵ \end{cases}$ را با ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

قانون

برای دستگاه $AX = B$ با ماتریس مربعی A:

- اگر $\det(A) \neq ۰$: جواب یکتا.
- اگر $\det(A) = ۰$: یا جواب ندارد یا بی‌نهایت جواب دارد.

تمرین ۲۶

برای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۲y = ۳ \\ ۲x + ky = ۱ \end{cases}$ جواب یکتا ندارد؟

پاسخ:

تمرین ۲۷

مقدار k را طوری تعیین کنید که دستگاه $\begin{cases} ۳x + y = ۴ \\ ۲x + ky = ۳ \end{cases}$ جواب منحصر به فرد داشته باشد.

پاسخ:

تمرین ۲۸

مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases}(m-۲)x+۳y=۲\\ ۵x+(m+۱)y=۵\end{cases}$ بیشمار جواب داشته باشد.

پاسخ:

تمرین ۲۹

به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{pmatrix}۲ & -a\\ a & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲\\ -۳\end{pmatrix}$ جواب ندارد؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

جواب دستگاه $\begin{cases} x+۲y=۴ \\ ۳x-y=۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

پاسخ:

تست

اگر ماتریس ضرایب دستگاه دو معادله‌ای دترمینان صفر داشته باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) حتماً جواب ندارد ۲) حتماً بی‌نهایت جواب دارد ۳) یا جواب ندارد یا بی‌نهایت جواب دارد ۴) حتماً جواب یکتا دارد

پاسخ:

تست

به ازای کدام مقادیر m دستگاه $\begin{cases}(m-۱)x+y=۲\\x+(m-۱)y=۳\end{cases}$ جواب یکتا دارد؟

۱) $m \neq ۱$ ۲) $m \neq ۰$ ۳) $m \neq ۲$ و $m \neq ۰$ ۴) $m \neq ۱$ و $m \neq ۲$

پاسخ:

کاربرد دترمینان در هندسه

قضیه

- مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار (a,b) و (c,d) ساخته می‌شود برابر $|\det \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}| = |ad-bc|$ است.
- مساحت مثلث با رأس‌های $A(x_۱,y_۱)$، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\begin{vmatrix}x_۱ & y_۱ & ۱\\x_۲ & y_۲ & ۱\\x_۳ & y_۳ & ۱\end{vmatrix}\right|.$$

- سه نقطه هم‌خط‌اند اگر و تنها اگر دترمینان بالا صفر باشد.
- تبدیل خطی با ماتریس M مساحت هر شکل را $|\det M|$ برابر می‌کند.

مثال

مساحت مثلث با رأس‌های $A(۱,۱)$، $B(۴,۲)$ و $C(۲,۵)$ را با دترمینان بیابید.

پاسخ:

مثال

نشان دهید نقاط $A(۱,۲)$، $B(۳,۴)$ و $C(۵,۶)$ هم‌خط‌اند.

پاسخ:

مثال

مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $(۳,۱)$ و $(۲,-۲)$ ساخته می‌شود را بیابید.

پاسخ:

تمرین ۳۰

مقدار k را چنان بیابید که سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۳)$ و $(۴,k)$ هم‌خط باشند.

پاسخ:

تمرین ۳۱

مساحت مثلث با رأس‌های $(۱, ۲)$، $(۳, ۵)$ و $(۶, ۱)$ را حساب کنید.

پاسخ:

تمرین ۳۲

مربع واحد تحت ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ به چه متوازی‌الاضلاعی تبدیل می‌شود و مساحت آن چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $(۳, ۰)$ و $(۱, ۲)$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۳

پاسخ:

تست

مساحت مثلثی با رأس‌های $(۰, ۰)$، $(۴, ۰)$ و $(۰, ۳)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷

پاسخ:

تست

دترمینان ماتریس یک تبدیل برابر ۳ است. مساحت هر شکل تحت این تبدیل چند برابر می‌شود؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ:

تست

سه نقطهٔ $A(۱,۲)$، $B(۳,۵)$ و $C(۵,k)$ هم‌خط‌اند. k کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ:

تست

به ازای کدام مقدار x و y ماتریس حاصل‌ضرب زیر قطری است؟

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & ۱ \\ ۲ & y \end{pmatrix}$$

۱) $x=۱,\ y=-۲$ ۲) $x=۲,\ y=-۱$ ۳) $x=۲,\ y=-۲$ ۴) $x=۱,\ y=-۱$

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد، $A^۳$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{۶}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ:

تست

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۲ & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های $A^{۲}-۴A$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۷\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{۶}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۳^{۶}$ ۳) $۲\cdot ۳^{۶}+۷^{۶}$ ۴) $۳^{۶}+۷^{۶}$

پاسخ:

تست

اگر $AB=\begin{pmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{pmatrix}$ برای دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $B\begin{pmatrix}۴ & ۳\\ -۱ & ۲\end{pmatrix}A-\begin{pmatrix}۳ & ۴\\ ۱ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & -۳\end{pmatrix}$ را در صورت امکان بررسی کنید. (تمرین مفهومی)

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، سطر سوم $A^۳$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}-۱۰ & ۱ & ۵\end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix}-۱۰ & ۱ & ۷\end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix}-۷ & ۵ & ۵\end{pmatrix}$
۴) $\begin{pmatrix}-۷ & ۵ & ۲\end{pmatrix}$

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^۲$ چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۳

پاسخ:

تست

برای ماتریس $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{pmatrix}$ اگر $A^۲+kA-۱۲I=O$ باشد، $\det(۳I+kI)$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۶۴

پاسخ:

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ با درایه‌های صحیح و $\det(A)=۲$ و $B=\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & a\end{pmatrix}$ و $B^۲=۲I$ (در صورت سازگاری ابعاد مفهومی بررسی شود) در حالت مناسب حاصل‌ضرب درایه‌های ناصفر را بیابید.

پاسخ:

تست‌های فصل

تست

به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & ۱ \\ ۲ & y \end{pmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

۱) $x=۱,\ y=-۲$
۲) $x=۲,\ y=-۱$
۳) $x=۲,\ y=-۲$
۴) $x=۱,\ y=-۱$

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) I
۲) $-I$
۳) A
۴) $-A$

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، در ماتریس $A^۶$ حاصل‌جمع درایه‌ها کدام است؟

۱) ۳۰
۲) ۱۰
۳) ۲۰
۴) ۶

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، حاصل‌جمع درایه‌های سطر اول $A^۶$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

تست

ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۲ & i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های $A^۲-۴A$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۷\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^۶$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۳^۶$ ۳) $۲\cdot ۳^۶+۷^۶$ ۴) $۳^۶+۷^۶$

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۳\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^۶$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۵۳ ۴) ۱۵

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{pmatrix}$ و $A^۲=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ باشد، $x+w$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

تست

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $AB=\begin{pmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{pmatrix}$ باشد (با فرض سازگاری)، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس مناسب را در نظر بگیرید. کدام گزینه محتمل‌تر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}-۱۰ & ۱ & ۵\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}-۱۰ & ۱ & ۷\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}-۷ & ۵ & ۵\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}-۷ & ۵ & ۲\end{pmatrix}$

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^۲$ چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۳

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های A چند برابر حاصل‌ضرب درایه‌های $A^۲$ است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۱

تست

برای ماتریس $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{pmatrix}$ اگر $A^۲+kA-۱۲I=O$ باشد، دترمینان $(۳I+kI)$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۶۴

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۲\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & -۲\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۱\end{pmatrix}$

تست

اگر $\det(A)=۵$ برای ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲، آنگاه $\det(۳A)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵ ۴) ۹

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{pmatrix}$ باشد، $\det(A^T)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

تست

دستگاه $\begin{cases} ۲x - y = ۳ \\ x + ۳y = ۴ \end{cases}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌نهایت

تست

به ازای کدام مقدار k دستگاه $\begin{cases} kx + y = ۲ \\ ۲x + ky = ۳ \end{cases}$ جواب یکتا ندارد؟

۱) $k = ۲$ ۲) $k = -۲$ ۳) $k = ۰$ ۴) $k = \sqrt{۲}$ یا $k = -\sqrt{۲}$

تست

مساحت مثلث با رأس‌های $(۱, ۱)$، $(۴, ۲)$ و $(۲, ۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) ۱۱ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۵

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، $A^۲$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$
۳) A ۴) $-A$

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A ۲) I
۳) $-I$ ۴) $-A$

تست

اگر $AB = BA = I$ باشد، کدام نتیجه لزوماً درست است؟

۱) $A = B$ ۲) $B = A^{-۱}$ ۳) $A = B^{-۱}$ و $B = A^{-۱}$ ۴) $\det(A) = ۰$

تست

اگر A پادمتقارن مرتبهٔ ۳ باشد، $\det(A)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) حتماً صفر ۲) حتماً مثبت ۳) حتماً منفی ۴) هر عدد حقیقی

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & ۳\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{pmatrix}$ باشند، درایهٔ $(AB)_{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

تست

ترانهادهٔ $\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & -۱ & ۴\end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۳ & ۴\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۳\\ ۲ & -۱ & ۴\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۲\\ ۴ & ۳\end{pmatrix}$

تست

اگر $\det\begin{pmatrix}x & ۱\\ ۲ & x\end{pmatrix}=۰$ باشد، مجموع جواب‌های x کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱

تست

دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۴\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، A^n کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲n \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix} n & ۲n \\ ۰ & n \end{pmatrix}$
۴) $\begin{pmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

تست

اگر $A + A^T = O$ باشد، A کدام نوع است؟

۱) متقارن
۲) پادمتقارن
۳) قطری
۴) همانی

تست

اگر $A = A^T$ و $A = -A^T$ باشد، آنگاه:

۱) $A = I$
۲) $A = O$
۳) A قطری است
۴) A اسکالر است

تست

حاصل $\begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) $\begin{pmatrix} ۳ & ۶ \\ ۴ & ۸ \end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix} ۱۱ \end{pmatrix}$
۴) تعریف نمی‌شود

تست

اگر $A_{۲\times ۳}$ و $B_{۳\times ۲}$ باشند، مرتبهٔ AB و BA به ترتیب کدام است؟

۱) ۲×۲ و ۳×۳
۲) ۳×۳ و ۲×۲
۳) ۳×۲ و ۲×۳
۴) فقط یکی تعریف می‌شود

تست

اگر $\det(A) = ۲$ و $\det(B) = ۳$ برای ماتریس‌های ۲×۲، آنگاه $\det(۲A^{-۱}B)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۶
۴) $\frac{۳}{۴}$

تست

سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۳)$ و $(۴,k)$ هم‌خط‌اند. k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تست

مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی $(۱,۲)$ و $(۳,۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۵

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $\det(A)=۱$، آنگاه $A^{-۱}$ برابر است با:

۱) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

تست

اگر $A^{۲}=I$ و $A\neq I$ و $A\neq -I$، کدام می‌تواند درست باشد؟

۱) $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ ۲) $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ ۳) $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ ۴) $A=O$

تست

اثر ماتریس $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تست

اگر $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ باشند، $\operatorname{tr}(AB)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تست

کدام ماتریس وارون‌پذیر است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{pmatrix}$
۴) $\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

تست

اگر $AX = B$ و A وارون‌پذیر باشد، آنگاه X برابر است با:

۱) $BA^{-۱}$
۲) $A^{-۱}B$
۳) $AB^{-۱}$
۴) $B^{-۱}A$

تست

دترمینان ماتریس قطری $\operatorname{diag}(۲, -۱, ۳)$ کدام است؟

۱) -۶
۲) ۶
۳) -۵
۴) ۰

تست

اگر دو سطر ماتریس A متناسب باشند، $\det(A)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۰
۴) بستگی به مرتبه دارد

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) O
۲) A
۳) $۱۰۰A$
۴) تعریف نمی‌شود

تست

حاصل‌ضرب ماتریس سطری $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$ در ماتریس ستونی $\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۰ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\begin{pmatrix} -۱ \end{pmatrix}$
۳) ۱
۴) تعریف نمی‌شود

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، A کدام نوع است؟

۱) متقارن ۲) پادمتقارن ۳) قطری ۴) اسکالر

تست

اگر $\det(A) = ۴$ و مرتبهٔ A برابر ۲ باشد، $\det(A^T A)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲

تست

جواب دستگاه $\begin{cases} x + y = ۳ \\ ۲x - y = ۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(۱, ۲)$ ۲) $(۲, ۱)$ ۳) $(۰, ۳)$ ۴) $(۳, ۰)$

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ باشند، $AB - BA$ کدام است؟

۱) O ۲) $\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

تست

مساحت مثلث با رأس‌های $(۰, ۰)$، $(۶, ۰)$ و $(۰, ۴)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

تست

اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد، $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{pmatrix}$

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، A^n-I برابر است با:

۱) $\begin{pmatrix}۰ & n\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix}n & n\\ ۰ & n\end{pmatrix}$
۴) O

تست

کدام گزینه برای ماتریس همانی I_n درست است؟

۱) $\det(I_n)=۰$
۲) $I_n^۲=I_n$
۳) $I_n+I_n=O$
۴) I_n پادمتقارن است

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ و $ad-bc=۱$، آنگاه $\det(A^۲)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۰
۴) -۱

تست

سه نقطهٔ $A(۱,۲)$، $B(۳,۵)$ و $C(۵,k)$ هم‌خطاند. k کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۹

تست

اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{pmatrix}$ باشد، $\operatorname{tr}(A)+\det(A)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۱

تست

ماتریس $\begin{pmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) فقط قطری
۲) فقط اسکالر
۳) قطری و اسکالر
۴) همانی

تست

اگر $AB = O$ و $A \neq O$، کدام نتیجه لزوماً درست است؟

۱) $B = O$ ۲) B وارون‌پذیر نیست ۳) $\det(A) = ۰$ ۴) هیچ‌کدام لزوماً