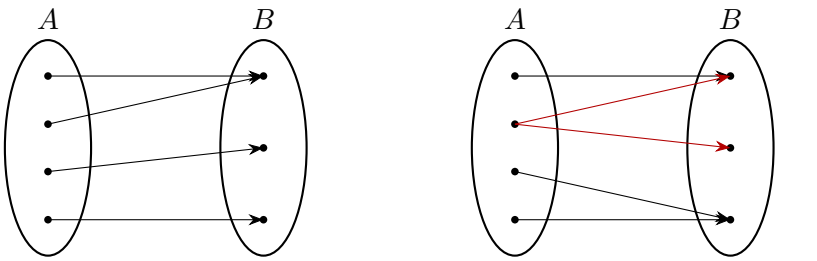
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

تبدیل‌های هندسی

تابع و تبدیل

تعریف

عمل نظیرسازی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را که هر عضو A را به **دقیقاً یک** عضو B نظیر کند، **تابع** می‌نامند. در یک تابع هر عضو مجموعهٔ اول فقط یک تصویر دارد، ولی لازم نیست همهٔ عضوهای مجموعهٔ دوم تصویر باشند.



دارد) تصویر دو عضو (یک نیست تابع

است تابع

تعریف

تابعی که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P دقیقاً یک نقطه مانند A' از همان صفحه نظیر کند و برعکس، هر نقطهٔ A' از صفحه، تصویر دقیقاً یک نقطه از همان صفحه باشد، یک **تبدیل** روی صفحهٔ P نامیده می‌شود. آن را با T نشان می‌دهیم:

$$T : P \to P, \qquad T(A) = A'$$

نکته

عبارت $T(A) = A'$ یعنی نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت تبدیل T است. در هر تبدیل، دو نقطهٔ متمایز هیچ‌گاه تصویر یکسان ندارند.

تبدیل‌ها می‌توانند سه اثر مهم روی شکل داشته باشند: شکل را **جابه‌جا** کنند، شکل را **بچرخانند** و **اندازهٔ** شکل را تغییر دهند. تبدیل‌هایی که در این کتاب بررسی می‌شوند (بازتاب، انتقال، دوران و تجانس) هر کدام یک یا چند تا از این اثرها را دارند و ماهیت شکل را عوض نمی‌کنند: دایره همیشه دایره می‌ماند و مثلث، مثلث.

تست‌های این بخش

تست

کدام نظیرسازی یک تبدیل روی صفحه است؟

۱) نظیرسازی که هر نقطه را به نقطه‌ای روی یک خط ثابت ببرد

۲) بازتاب نسبت به یک خط

۳) نظیرسازی که هر نقطه را به یک نقطهٔ ثابت ببرد

۴) نظیرسازی که هر نقطه را به دو نقطه ببرد

پاسخ:

تست

کدام ویژگی در تعریف تبدیل نیامده است؟

۱) دو نقطهٔ متمایز تصویرهای متمایز داشته باشند

۲) حفظ طول پاره‌خط‌ها

۳) هر نقطه دقیقاً یک تصویر داشته باشد

۴) هر نقطه تصویر دقیقاً یک نقطه باشد

پاسخ:

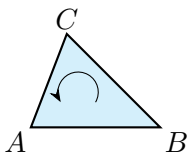
تبدیل طول‌پا، جهت‌پا و شیب‌پا

تعریف

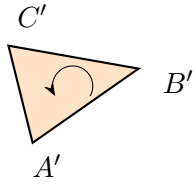
۰. تبدیلی که طول همهٔ پاره‌خط‌ها را حفظ کند، **طول‌پا** یا **ایزومتری** نام دارد؛ یعنی اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ آن‌گاه $AB = A'B'$. شکل و تصویرش در تبدیل طول‌پا همنهشت‌اند.

۰. تبدیلی که جهت چرخش رأس‌های هر چندضلعی را (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد بودن ترتیب رأس‌ها) حفظ کند، **جهت‌پا** است.

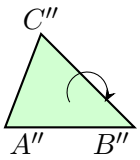
۰. تبدیلی که شیب همهٔ خط‌ها را حفظ کند، یعنی هر پاره‌خط با تصویرش موازی باشد، **شیب‌پا** نام دارد.



ABC



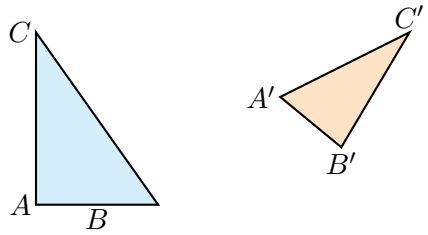
$A'B'C'$ با هم‌جهت ABC



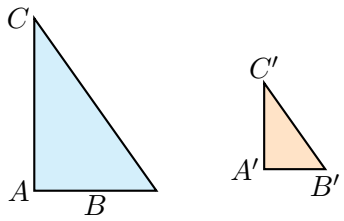
$A''B''C''$ جهت‌عوض‌کرده

نکته

در شکل بالا، ترتیب رأس‌های ABC و $A'B'C'$ هر دو پادساعت‌گرد است (تبدیل جهت‌پا)، ولی ترتیب $A''B''C''$ ساعت‌گرد است؛ پس تبدیل $ABC \to A''B''C''$ جهت شکل را عوض کرده است.



نیست شیب‌پا



$AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ و $AC \parallel A'C'$ شیب‌پا:

مثال

مربعی به مساحت ۱۲ را با یک تبدیل طول‌پا تصویر کرده‌ایم. محیط شکل حاصل چقدر است؟

پاسخ:

تمرین

مثلثی با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و ۱۳ را با یک بازتاب تصویر کرده‌ایم. مساحت تصویر چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

کدام تبدیل لزوماً طول‌پا نیست؟

۱) دوران ۲) انتقال ۳) تجانس با نسبت ۲ ۴) بازتاب

پاسخ:

تست

مربعی به مساحت ۱۸ را با یک تبدیل طول‌پا تصویر کرده‌ایم. محیط تصویر کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۳۶ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

پاسخ:

تست

کدام تبدیل جهت‌پا نیست؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) تجانس با نسبت -۲ ۴) دوران

پاسخ:

بازتاب نسبت به خط

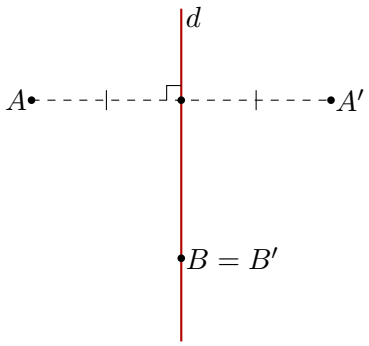
تعریف

تبدیل T را **بازتاب نسبت به خط** d می‌نامیم، اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۰. تصویر هر نقطهٔ A که روی d نیست، نقطه‌ای مانند A' باشد که d عمودمنصف پاره‌خط AA' است؛

- تصویر هر نقطهٔ B که روی d است، خود B باشد.

خط d را **محور بازتاب** می‌نامند.



قضیه

بازتاب نسبت به خط، ویژگی‌های زیر را دارد:

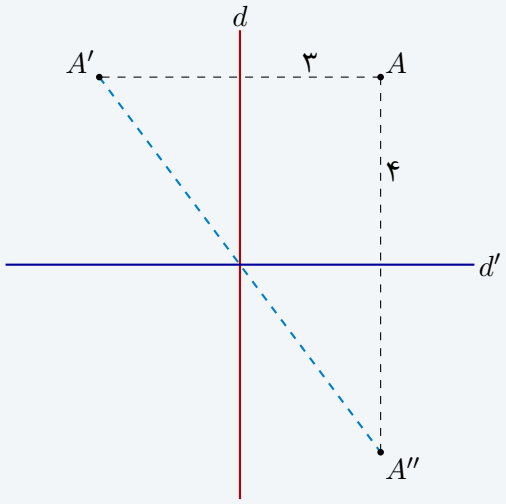
- طول‌پا است؛ یعنی پاره‌خط و تصویرش هم‌اندازه‌اند.
- جهت‌پا نیست؛ جهت چرخش رأس‌های شکل را عوض می‌کند.
- شیب‌پا نیست مگر برای خطی که موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد.
- اندازهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود.
- شکل و تصویرش همنهشت‌اند.
- اگر A' تصویر A باشد، تصویر A' همان A است.

نکته

اگر دو نقطهٔ متمایز A و B تصویر یکدیگر باشند، محور بازتاب همان عمودمنصف پاره‌خط AB است. نقطه‌های واقع بر محور بازتاب، تنها نقطه‌هایی‌اند که روی خودشان تصویر می‌شوند.

مثال

دو خط d و d' بر هم عمودند. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از خط d و به فاصلهٔ ۴ از خط d' قرار دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d و A'' بازتاب A نسبت به d' باشد، طول $A'A''$ چقدر است؟



پاسخ:

تمرین

تصویر نقطهٔ $A(۳,-۲)$ را تحت بازتاب نسبت به محور xها، محور yها، خط $y=x$ و خط $y=-x$ بنویسید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

بازتاب نقطهٔ $A(-۲,۵)$ نسبت به محور xها کدام است؟

۱) $(۲,-۵)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(-۲,-۵)$ ۴) $(۵,-۲)$

پاسخ:

تست

بازتاب نقطهٔ $(۳,۱)$ نسبت به خط $y=-x$ کدام است؟

۱) $(-۱,-۳)$ ۲) $(-۳,-۱)$ ۳) $(۱,-۳)$ ۴) $(۱,۳)$

پاسخ:

تست

A' بازتاب A نسبت به خط d است و M نقطه‌ای دلخواه روی d است. کدام رابطه همواره برقرار است؟

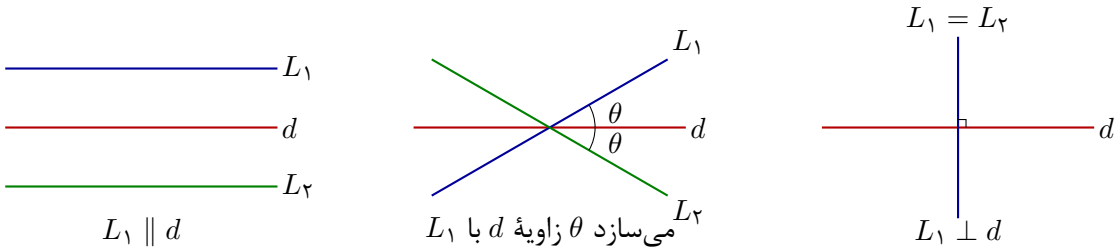
۱) $MA'=AA'$ ۲) $\widehat{AMA'}=۹۰^\circ$ ۳) $MA=۲MA'$ ۴) $MA=MA'$

پاسخ:

بازتاب یک خط

اگر خط $L_۱$ در بازتاب نسبت به خط d به خط $L_۲$ تبدیل شود، سه حالت برای وضعیت $L_۱$ نسبت به محور بازتاب وجود دارد:

وضعیت $L_۱$ نسبت به محور d	تصویر $L_۲$
موازی d	خطی موازی d و هم‌فاصله با $L_۱$ در طرف دیگر
عمود بر d	خود $L_۱$ (خط روی خودش تصویر می‌شود)
زاویهٔ θ با d	خطی که با d همان زاویهٔ θ را می‌سازد؛ d نیمساز زاویهٔ بین $L_۱$ و $L_۲$ است



تمرین

خط $y = ۵$ را نسبت به خط $y = ۲$ بازتاب می‌دهیم. معادلهٔ تصویر چیست؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

بازتاب خط $y = ۴$ نسبت به خط $y = ۱$ کدام خط است؟

۱) $y = -۲$ ۲) $y = ۲$ ۳) $y = -۳$ ۴) $y = -۴$

پاسخ:

تست

بازتاب خطی که بر محور بازتاب عمود است، کدام است؟

۱) خطی موازی با آن ۲) خود آن خط ۳) محور بازتاب ۴) خطی عمود بر آن

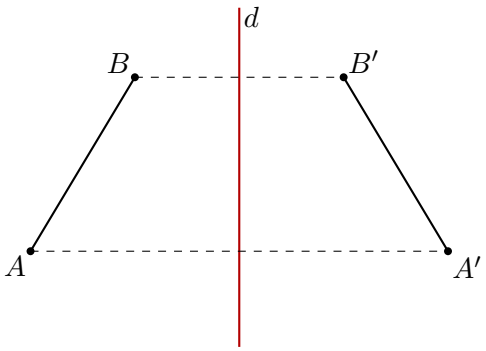
پاسخ:

به‌دست آوردن محور بازتاب برای دو پاره‌خط یا دو شکل

دو پاره‌خط غیرموازی AB و $A'B'$ در صورتی بازتاب یکدیگرند که دو شرط زیر برقرار باشد:

- $AB = A'B'$؛
- عمودمنصف‌های AA' و BB' بر هم منطبق باشند.

در این صورت خط مشترک این دو عمودمنصف، محور بازتاب است.



نکته

برای اینکه دو شکل هم‌اندازه (و هم‌شکل)، بازتاب یکدیگر باشند باید سه شرط برقرار باشد: دو شکل همنهشت باشند، جهت آن‌ها مخالف هم باشد و پاره‌خط‌هایی که رأس‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند با هم موازی باشند. اگر دو شکل جهت یکسان داشته باشند، هرگز نمی‌توانند بازتاب یکدیگر باشند.

تمرین

نقطه‌های $A(۱, ۴)$ و $B(۷, ۲)$ بازتاب یکدیگرند. معادلهٔ محور بازتاب را بنویسید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

بازتاب نقطهٔ $A(۰,۰)$ نسبت به یک خط، نقطهٔ $A'(۶,۰)$ است. معادلهٔ محور بازتاب کدام است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $y = ۳$ ۳) $x = ۶$ ۴) $x = ۳$

پاسخ:

تست

اگر دو پاره‌خط غیرموازی AB و $A'B'$ بازتاب یکدیگر باشند، کدام شرط لازم است؟

۱) $AB = AA'$ ۲) $AA' = BB'$ ۳) $AB \parallel A'B'$ ۴) عمودمنصف‌های AA' و BB' بر هم منطبق باشند

پاسخ:

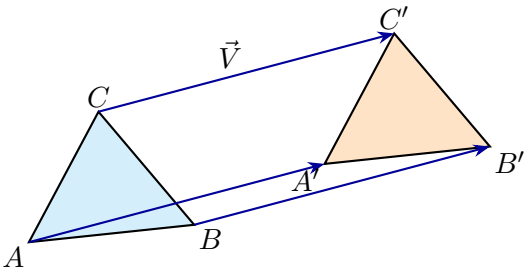
انتقال

تعریف

انتقال تحت بردار $\vec{V}$، تبدیلی از صفحه است که تصویر هر نقطهٔ A را نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه می‌دهد، به‌طوری که

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}.$$

یعنی انتقال هر نقطهٔ صفحه را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ جابه‌جا می‌کند.



قضیه

انتقال بر اساس تعریف، ویژگی‌های زیر را دارد:

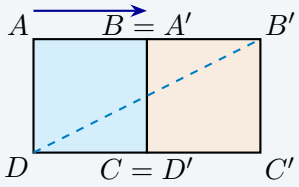
- طول‌پا (ایزومتری) است؛
- شیب‌پا است؛ هر پاره‌خط با تصویرش موازی (و هم‌اندازه) است؛
- جهت‌پا است؛
- اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند؛
- هر شکل و تصویر آن، همنهشت و هم‌جهت‌اند.

نکته

تصویر خط d تحت انتقال، خطی موازی با d یا خود d است. اگر بردار انتقال موازی d باشد، d روی خودش تصویر می‌شود. اگر دو خط موازی d و d' داده شده باشند، بی‌شمار بردار انتقال وجود دارد که d را به d' می‌برد؛ ولی اگر دو خط متقاطع باشند، هیچ انتقالی نمی‌تواند یکی را به دیگری ببرد.

مثال

مربع $ABCD$ را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ رأس D تا تصویر رأس B چند برابر ضلع مربع است؟



پاسخ:

تمرین

نقطهٔ $A(۲,۵)$ تحت انتقال با بردار $\vec{V}=(۳,-۱)$ به کدام نقطه می‌رود؟ اگر $B'(۱,۱)$ تصویر B تحت همین انتقال باشد، B کدام است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

تصویر نقطهٔ $A(۱,۱)$ تحت انتقال با بردار $\vec{V}=(-۲,۳)$ کدام است؟

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(۳,-۲)$ ۳) $(-۱,۴)$ ۴) $(۳,۴)$

پاسخ:

تست

کدام گزینه دربارهٔ انتقال درست است؟

۱) جهت شکل را عوض می‌کند ۲) شیب‌پا نیست ۳) نقطهٔ ثابت دارد ۴) هم طول‌پا و هم شیب‌پا است

پاسخ:

تست

اگر دو خط d و d' متقاطع باشند، چند بردار انتقال d را به d' می‌برد؟

۱) بی‌شمار ۲) دو ۳) یک ۴) هیچ

پاسخ:

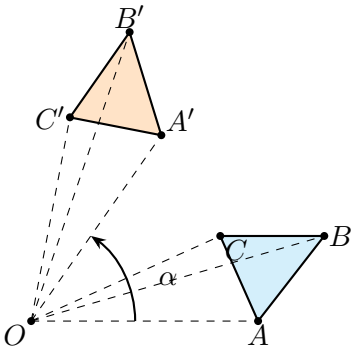
دوران

تعریف

نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت **دوران** به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α است، هرگاه

$$OA = OA', \qquad \widehat{AOA'} = \alpha.$$

دوران، هر نقطهٔ صفحه را حول O می‌چرخاند. جهت چرخش می‌تواند ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد باشد؛ در مسئله‌ها این جهت را طراح مسئله مشخص می‌کند.



قضیه

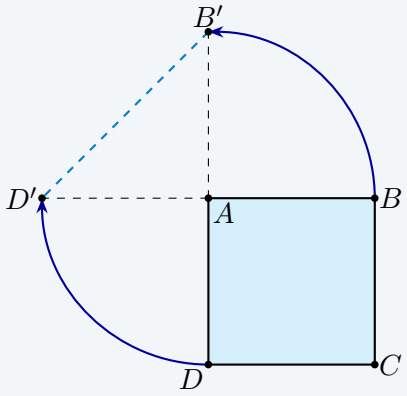
دوران به مرکز O و زاویهٔ α ویژگی‌های زیر را دارد:

۰. طول‌پا است، یعنی طول پاره‌خط را حفظ می‌کند؛

- شیب‌پا نیست، یعنی شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند، مگر آن‌که $\alpha = ۱۸۰^\circ$ باشد؛
- جهت‌پا است و اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند؛ شکل و تصویرش همنهشت و هم‌جهت‌اند؛
- مرکز دوران روی عمودمنصف هر پاره‌خطی قرار دارد که یک نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

مثال

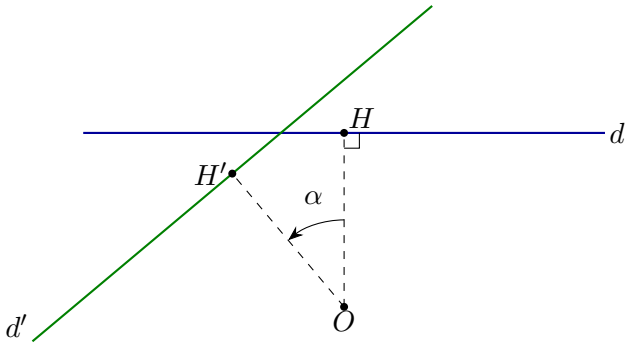
مربع $ABCD$ به ضلع ۲ داده شده است. رأس B را به مرکز A و با زاویهٔ ۹۰° در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌دهیم تا به B' برسد و رأس D را با همین مرکز و زاویه در جهت ساعت‌گرد دوران می‌دهیم تا به D' برسد. طول $B'D'$ را بیابید.



پاسخ:

نکته

دوران‌یافتهٔ یک خط. برای یافتن تصویر خط d تحت دوران به مرکز O و زاویهٔ α، از O بر d عمود می‌کنیم تا پای عمود H به دست آید. سپس H را به اندازهٔ α حول O می‌چرخانیم تا H' پیدا شود و در H' خطی عمود بر OH' رسم می‌کنیم؛ این خط همان تصویر d است.



قضیه

اگر دو خط d و d' داده شده باشند و بخواهیم بدانیم d با چه دورانی به d' تبدیل می‌شود، آن‌گاه:

- زاویهٔ دوران یا برابر زاویهٔ بین دو خط است یا مکمل آن؛
- مرکز دوران از دو خط به یک فاصله است و روی نیمساز زاویهٔ بین آن‌ها قرار دارد.

در دوران 180° هر خط به خطی موازی با خودش (یا به خودش) تبدیل می‌شود. اگر مرکز دوران 180° روی خط باشد، آن خط روی خودش تصویر می‌شود.

دو پاره‌خط هم‌اندازه AB و $A'B'$ را همواره می‌توان با یک دوران به هم تبدیل کرد. اگر دو پاره‌خط موازی باشند و در جهت مخالف قرار گیرند، زاویهٔ دوران 180° و مرکز دوران محل برخورد AA' و BB' است. در حالت غیرموازی، مرکز دوران محل برخورد عمودمنصف‌های AA' و BB' است و زاویهٔ دوران با زاویهٔ بین امتداد دو پاره‌خط یا مکمل آن برابر است.

تمرین

نقطهٔ $B(1,2)$ را حول مبدأ به اندازهٔ 90° در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌دهیم. تصویر آن کدام است؟ با دوران 180° چطور؟

پاسخ:

تمرین

مربع $ABCD$ را حول مرکزش (محل برخورد قطرها) به اندازهٔ 90° دوران می‌دهیم. تصویر مربع چیست و دوران چند نقطهٔ ثابت دارد؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

نقطهٔ $A(۳,-۱)$ را حول مبدأ به اندازهٔ ۹۰° در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌دهیم. تصویر آن کدام است؟

۱) $(-۳,۱)$ ۲) $(۱,-۳)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۱,-۳)$

پاسخ:

تست

دوران ۱۸۰° حول مبدأ، نقطهٔ (a,b) را به کدام نقطه می‌برد؟

۱) $(a,-b)$ ۲) $(-a,b)$ ۳) $(-a,-b)$ ۴) (b,a)

پاسخ:

تست

A' دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و زاویهٔ ۶۰° است و $OA=۴$. طول AA' کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

پاسخ:

تجانس

تعریف

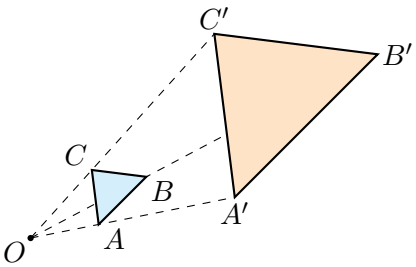
فرض کنید O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ عددی حقیقی باشد. نقطهٔ M' را **مجانس** نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت k می‌نامیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۰. سه نقطهٔ O، M و M' روی یک خط راست باشند؛

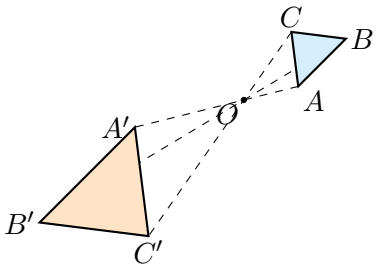
۰. $OM' = |k| \cdot OM$؛

۰. اگر $k > 0$ باشد M و M' در یک طرف O قرار دارند (**تجانس مستقیم**) و اگر $k < 0$ باشد O بین M و M' است (**تجانس معکوس**).

اگر $|k| > 1$ باشد، مجانس از شکل اصلی بزرگ‌تر است و تجانس را **انبساط** می‌نامیم؛ اگر $|k| < 1$ باشد، مجانس کوچک‌تر است و تجانس را **انقباض** می‌نامیم.



تجانس ۳ = k (مستقیم)



تجانس ۲− = k (معکوس)

قضیه

تجانس به مرکز O و نسبت k ویژگی‌های زیر را دارد:

۰. طول‌پا نیست، مگر آن‌که $k = \pm 1$ باشد (طول هر پاره‌خط $|k|$ برابر می‌شود)؛

۰. شیب‌پا و جهت‌پا است و اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند؛

۰. شکل و مجانسش متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر $|k|$ است؛

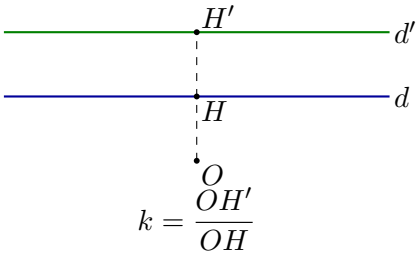
۰. نسبت مساحت‌های شکل و مجانس آن برابر k^2 است؛

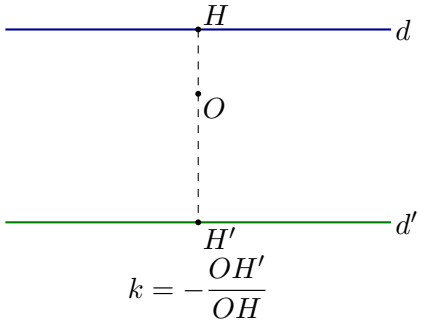
۰. خط‌هایی که هر نقطه را به مجانسش وصل می‌کنند در مرکز تجانس همرس‌اند.

نکته

دو شکل متشابه، تنها در صورتی مجانس‌اند که اضلاع نظیرشان دوبه‌دو موازی باشد. در این حالت مرکز تجانس، محل همرسی خط‌های واصل بین هر نقطه و مجانسش است. اگر اضلاع نظیر موازی نباشند، تجانسی میان دو شکل وجود ندارد.

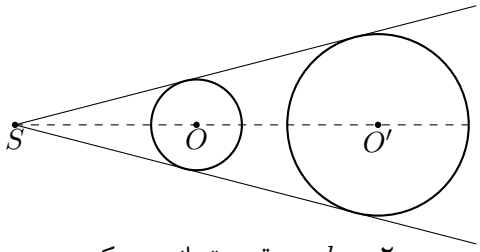
هر دو خط موازی با هم مجانس‌اند و مرکز تجانس هر نقطهٔ دلخواه از صفحه است که روی هیچ‌یک از دو خط نباشد. اگر O و H و H' روی یک خط عمود بر دو خط موازی باشند، نسبت تجانس برابر $\frac{OH'}{OH}$ است؛ این نسبت وقتی مرکز تجانس بین دو خط باشد، منفی (تجانس معکوس) و وقتی بیرون دو خط باشد، مثبت (تجانس مستقیم) است.



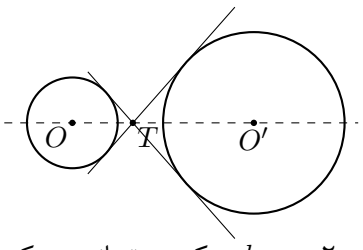


قضیه

هر دو دایرهٔ دلخواه مجانس‌اند و نسبت تجانس آن‌ها برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است. اگر شعاع دو دایره برابر باشد، آن‌ها فقط مجانس معکوس‌اند؛ اگر شعاع‌ها برابر نباشند، هم تجانس مستقیم و هم تجانس معکوس بین آن‌ها وجود دارد. مرکز تجانس مستقیم، محل برخورد مماس‌های مشترک خارجی و مرکز تجانس معکوس، محل برخورد مماس‌های مشترک داخلی دو دایره است.



$k = ۲$ مستقیم: تجانس مرکز



$k = -۲$ معکوس: تجانس مرکز

تمرین

در تجانس به مرکز مبدأ و نسبت $k = -۳$ تصویر نقطهٔ $A(۲, ۳)$ را بیابید.

پاسخ:

تمرین

مثلثی با مساحت ۸ و محیط ۱۲ را در تجانسی با نسبت ۳ تصویر می‌کنیم. مساحت و محیط تصویر چقدر است؟

پاسخ:

تمرین

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ مفروض‌اند که مرکزشان به ترتیب $O(۰,۰)$ و $O'(۹,۰)$ است. مرکز تجانس مستقیم و معکوس این دو دایره را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در تجانس به مرکز O و نسبت -۲، اگر $OM = ۳$ باشد، OM' کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱.۵ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

تست

نسبت مساحت یک شکل به مساحت مجانسش در تجانس با نسبت -۳ کدام است؟

۱) -۹ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ:

تست

نسبت تجانس مستقیمی که دایره‌ای به شعاع ۳ را به دایره‌ای به شعاع ۶ می‌برد، کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۹

پاسخ:

تبدیل همانی و نقطهٔ ثابت

تبدیلی که هر نقطهٔ صفحه را روی خودش تصویر کند، **تبدیل همانی** نام دارد و آن را با I نشان می‌دهند؛ پس $I(A) = A$ برای هر نقطهٔ A. تبدیل همانی هیچ اثری روی شکل‌ها، نقطه‌ها و خط‌ها ندارد.

نکته

بازتاب هرگز تبدیل همانی نیست، چون نقطه‌های خارج از محور بازتاب جابه‌جا می‌شوند. اما انتقال با بردار صفر، تجانس با نسبت $k = ۱$ و دوران با زاویهٔ ۳۶۰° (یا هر مضرب صحیح ۳۶۰°) همگی تبدیل همانی‌اند. برای نمونه، دوران ۷۲۰° چون دو دور کامل است، هر نقطه را روی خودش می‌برد.

اگر نقطه‌ای تحت یک تبدیل روی خودش تصویر شود، یعنی $T(A) = A$، آن را **نقطهٔ ثابت** تبدیل T می‌نامیم.

تبدیل	نقطه‌های ثابت
بازتاب نسبت به خط	همهٔ نقطه‌های روی محور بازتاب (بی‌شمار نقطهٔ ثابت)
دوران	مرکز دوران
تجانس	مرکز تجانس
انتقال (با بردار غیرصفر)	ندارد
تبدیل همانی	همهٔ نقطه‌های صفحه

تمرین

کدام‌یک از تبدیل‌های بازتاب، انتقال و دوران نقطهٔ ثابت ندارد؟ چرا؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

کدام تبدیل، تبدیل همانی است؟

۱) تجانس با نسبت -۱ ۲) دوران ۳۶۰° ۳) بازتاب ۴) انتقال با بردار غیرصفر

پاسخ:

تست

کدام تبدیل نقطهٔ ثابت ندارد؟

۱) دوران ۹۰° ۲) انتقال با بردار غیرصفر ۳) بازتاب ۴) تجانس با نسبت ۲

پاسخ:

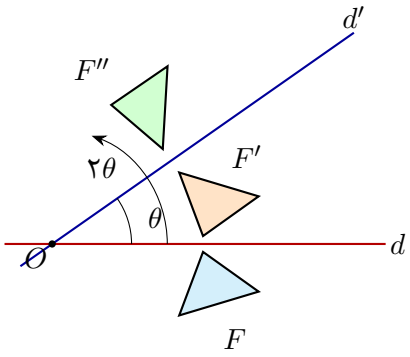
ترکیب دو تبدیل

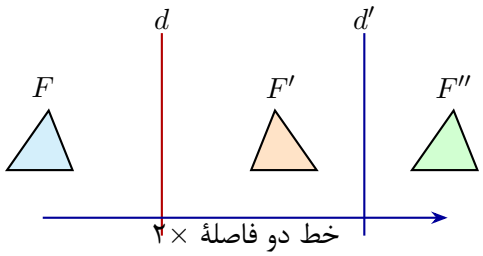
فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ دو تبدیل باشند. ترکیب آن‌ها که با $T_۲ \circ T_۱$ نشان داده می‌شود، تبدیلی است که ابتدا $T_۱$ و سپس $T_۲$ را اعمال می‌کند:

$$A' = T_۱(A), \qquad A'' = T_۲(A') \implies A'' = (T_۲ \circ T_۱)(A).$$

قضیه

- ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط **متقاطع**، یک دوران است. مرکز آن محل برخورد دو محور و زاویهٔ آن دو برابر زاویهٔ بین دو محور است.
- ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط **موازی**، یک انتقال است. بردار انتقال بر دو خط عمود است و طولش دو برابر فاصلهٔ دو خط است.
- ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ یک انتقال با بردار $\vec{V}_۱ + \vec{V}_۲$ است.
- ترکیب دو دوران هم‌مرکز با زاویه‌های θ و θ'، یک دوران با همان مرکز و زاویهٔ $\theta + \theta'$ (هم‌جهت) یا $\theta - \theta'$ (ناهم‌جهت) است.
- ترکیب دو تجانس هم‌مرکز با نسبت‌های $k_۱$ و $k_۲$ یک تجانس با نسبت $k_۱k_۲$ است.





نکته

ترکیب دو بازتاب هرگز نمی‌تواند یک بازتاب باشد. زیرا هر بازتاب جهت شکل را عوض می‌کند و در ترکیب دو بازتاب، جهت دو بار عوض می‌شود و به حالت اول برمی‌گردد؛ ولی خود بازتاب جهت‌پا نیست. ترکیب دو دوران θ و $-\theta$ (هم‌مرکز) تبدیل همانی است.

تمرین

ابتدا نسبت به خط $x = ۰$ و سپس نسبت به خط $x = ۳$ بازتاب می‌دهیم. ترکیب این دو بازتاب چه تبدیلی است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

ترکیب بازتاب نسبت به دو خط موازی که فاصلهٔ آن‌ها ۵ است، یک انتقال به اندازهٔ چند واحد است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۲.۵ ۴) ۵

پاسخ:

تست

ترکیب بازتاب نسبت به دو خط متقاطع که زاویهٔ بینشان ۲۵° است، یک دوران به چه زاویه‌ای است؟

۱) ۵۰° ۲) ۱۲.۵° ۳) ۱۰۰° ۴) ۲۵°

پاسخ:

تست

ترکیب دو تجانس هم‌مرکز با نسبت‌های ۲ و -۳ چه تبدیلی است؟

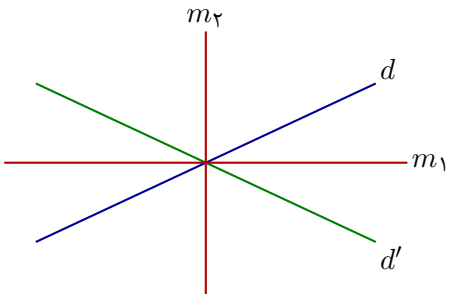
۱) تجانس با نسبت -۶ ۲) تجانس با نسبت ۵ ۳) تجانس با نسبت ۶ ۴) تجانس با نسبت -۱

پاسخ:

تبدیل‌یافتهٔ خط

اگر d' تصویر خط d تحت یک تبدیل باشد، بسته به نوع تبدیل، وضعیت d و d' نسبت به هم فقط در حالت‌های زیر ممکن است:

تبدیل	$d' \parallel d$	d' و d متقاطع	d' بر d منطبق
بازتاب	محور، خط وسط بین d و d' است	محور یکی از دو نیمساز زاویه‌های بین دو خط است (دو محور)	محور، خود d یا هر خط عمود بر d است
انتقال	بی‌شمار بردار: دو سر بردار روی d و d'	ممکن نیست	بردار انتقال موازی d است
دوران ۱۸۰°	مرکز دوران بین d و d' و هم‌فاصله از آن‌هاست	ممکن نیست	مرکز دوران، هر نقطهٔ روی d است
دوران $۰ < \theta < ۱۸۰^\circ$	ممکن نیست	مرکز، هر نقطهٔ روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط (از دو خط هم‌فاصله) و زاویهٔ دوران برابر زاویهٔ بین دو خط (یا مکمل آن)	ممکن نیست
تجانس	مرکز، هر نقطهٔ بیرون d و d'؛ نسبت از فاصله‌ها به دست می‌آید	ممکن نیست	مرکز، هر نقطهٔ روی d و نسبت دلخواه



متقاطع خط دو برای ممکن بازتاب محور دو

تمرین

محور بازتابی را بیابید که خط $x = ۱$ را به خط $x = ۷$ ببرد.

پاسخ:

تمرین

کدام بازتاب‌ها خط $y = 0$ را به خط $y = x$ می‌برند؟ معادلهٔ هر محور را بنویسید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

دو خط متقاطع داده شده‌اند. چند بازتاب مختلف یکی را به دیگری می‌برد؟

۱) هیچ ۲) بی‌شمار ۳) یک ۴) دو

پاسخ:

تست

برای دو خط موازی، کدام تبدیل نمی‌تواند یکی را به دیگری ببرد؟

۱) دوران 180° ۲) انتقال ۳) بازتاب ۴) دوران 60°

پاسخ:

تست

خط d با دورانی به اندازهٔ 40° به خط d' تبدیل شده است. زاویهٔ تند بین این دو خط چند درجه است؟

۱) 40° ۲) 20° ۳) 140° ۴) 80°

پاسخ:

مقایسهٔ تبدیل‌ها

تبدیل	طول پاره‌خط	شیب خط	جهت شکل	اندازهٔ زاویه	نقطهٔ ثابت	شکل و تصویر
بازتاب	ثابت	ممکن است تغییر کند	تغییر می‌کند	ثابت	نقطه‌های محور	همنهشت
انتقال	ثابت	ثابت	ثابت	ثابت	ندارد	همنهشت
دوران 180°	ثابت	ثابت	ثابت	ثابت	مرکز دوران	همنهشت
دوران $0 < \theta < 180^\circ$	ثابت	ممکن است تغییر کند	ثابت	ثابت	مرکز دوران	همنهشت
تجانس	$\lvert k\rvert$ برابر	ثابت	ثابت	ثابت	مرکز تجانس	متشابه

نکته

در انتقال و تجانس شیب خط ثابت می‌ماند، ولی در دوران و بازتاب لزوماً حفظ نمی‌شود. تنها تبدیلی که جهت شکل را عوض می‌کند، بازتاب است.

تست‌های این بخش

تست

کدام تبدیل شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند؟

۱) انتقال ۲) دوران 180° ۳) دوران 90° ۴) تجانس

پاسخ:

تست

کدام تبدیل جهت شکل را عوض می‌کند؟

۱) تجانس با نسبت ۳ ۲) بازتاب ۳) دوران ۴) انتقال

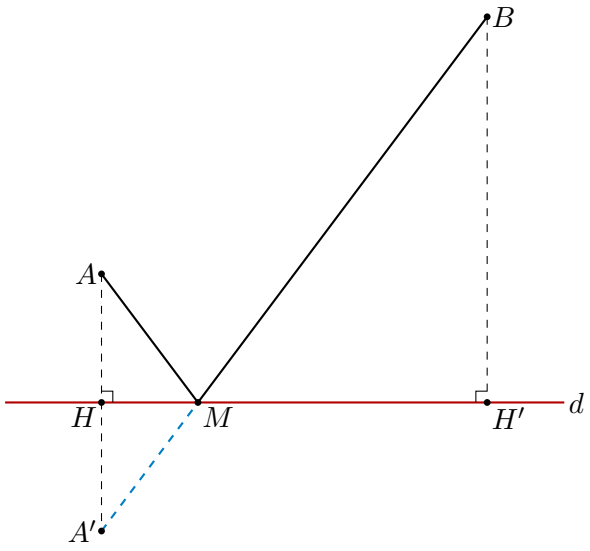
پاسخ:

کاربرد تبدیل‌ها

مسئلهٔ هرون (تیپ اول)

دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ M را روی d چنان بیابیم که طول خط شکستهٔ AMB کمترین مقدار ممکن باشد. بازتاب A نسبت به d را A' می‌نامیم. چون $AM = A'M$، همواره $AM + MB = A'M + MB \geq A'B$ و برابری وقتی رخ می‌دهد که M روی پاره‌خط $A'B$ باشد. پس M را محل برخورد $A'B$ با d می‌گیریم و

$$\min(AM + MB) = A'B.$$



نکته

در حالت کمینه، زاویه‌های $\widehat{AMH}$ و $\widehat{BMH'}$ با هم برابرند (H و H' پای عمودهای وارد از A و B بر d هستند)؛ پس d نیمساز زاویهٔ خارجی رأس M از مثلث ABM است. همچنین مثلث‌های AHM و $BH'M$ متشابه‌اند و

$$\frac{MB}{MA}=\frac{BH'}{AH}=\frac{MH'}{MH}.$$

مثال

نقطه‌های $A(۱,۲)$ و $B(۷,۶)$ مفروض‌اند و نقطهٔ M روی محور xها حرکت می‌کند. کمترین طول خط شکستهٔ AMB را بیابید.

پاسخ:

قضیه

تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محورهای مختصات و نیمسازها:

- نسبت به محور xها: $A'(a,-b)$؛
- نسبت به محور yها: $A'(-a,b)$؛
- نسبت به خط $y=x$: $A'(b,a)$؛
- نسبت به خط $y=-x$: $A'(-b,-a)$.

تمرین

نقطه‌های $A(۰,۳)$ و $B(۶,۵)$ مفروض‌اند و M روی محور xها حرکت می‌کند. کمترین طول AMB را بیابید.

پاسخ:

تمرین

برای $A(۱,۱)$ و $B(۵,۴)$ و M روی محور xها، کمترین مقدار $AM+MB$ و مختصات M را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

M روی محور xها حرکت می‌کند. کمترین طول AMB برای $A(۰,۲)$ و $B(۶,۴)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۶

پاسخ:

تست

کمترین طول AMB برای $A(۱,۱)$ و $B(۴,۵)$ و M روی محور xها کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۷}$ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) $۳\sqrt{۵}$

پاسخ:

تست

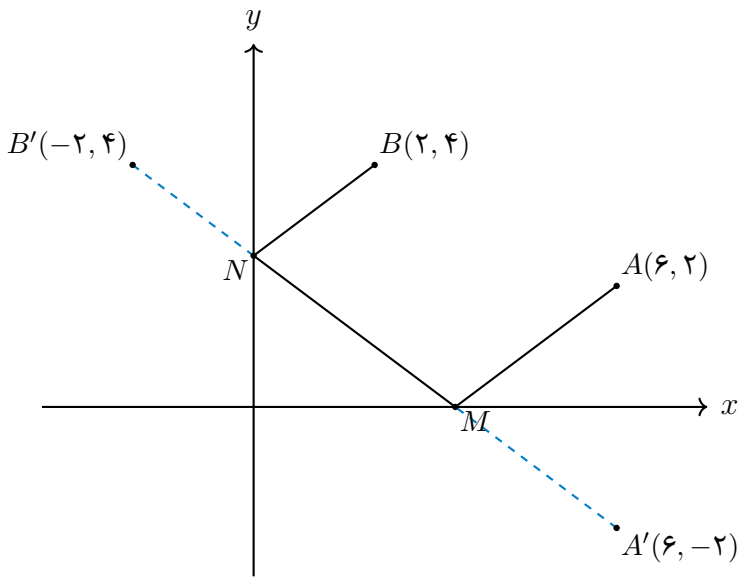
در حالت کمینهٔ AMB (با M روی خط d) کدام رابطه برقرار است؟

۱) $\widehat{AMB} = ۹۰^\circ$ ۲) زاویه‌های MA و MB با d مکمل‌اند ۳) $MA = MB$ ۴) زاویه‌هایی که MA و MB در دو طرف با خط d می‌سازند برابرند

پاسخ:

کاربرد مسئلهٔ هرون (تیپ دوم)

دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و دو نقطهٔ ثابت A و B داده شده‌اند. نقطهٔ M روی $d_۱$ و نقطهٔ N روی $d_۲$ حرکت می‌کنند. برای یافتن کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$، بازتاب A نسبت به $d_۱$ را A' و بازتاب B نسبت به $d_۲$ را B' می‌نامیم. آن‌گاه $AM = A'M$ و $NB = NB'$ و در نتیجه $AMNB \geq A'B'$. اگر $A'B'$ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را به ترتیب در M و N قطع کند، کمترین مقدار به دست می‌آید.



در این شکل $A'B' = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = ۱۰$، پس کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ برابر ۱۰ است. در حالت کمینه زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N دو به دو برابرند.

تمرین

$A(۴, ۱)$ و $B(۲, ۳)$ مفروض‌اند. نقطهٔ M روی محور xها و نقطهٔ N روی محور yها حرکت می‌کنند. کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$A(۴, ۱)$ و $B(۲, ۳)$ مفروض‌اند، M روی محور xها و N روی محور yها است. کمترین طول $AMNB$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) $۲\sqrt{۱۳}$

پاسخ:

تست

برای کمترین طول $AMNB$ (M روی d_1 و N روی d_2)، کدام نقطه‌ها را بازتاب می‌دهیم؟

۱) هیچ‌کدام را ۲) هر دو را نسبت به d_1 ۳) A را نسبت به d_1 و B را نسبت به d_2 ۴) هر دو را نسبت به d_2

پاسخ:

کاربرد مسئلهٔ هرون (تیپ سوم)

دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند و نقطه‌های M و N روی d به فاصلهٔ ثابت L از هم‌اند ($MN = L$).
برای یافتن کمترین طول $AMNB$:

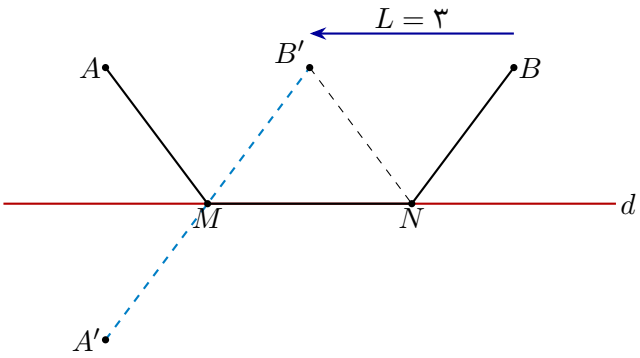
۰. A را نسبت به d بازتاب می‌دهیم تا A' به دست آید؛

۰. B را به اندازهٔ L در راستای d و به سمت A انتقال می‌دهیم تا B' به دست آید؛

۰. A' را به B' وصل می‌کنیم تا d را در M قطع کند و N را به فاصلهٔ L از M روی d (به سمت B) می‌گیریم.

در این صورت

$$\min(AM + MN + NB) = A'B' + L.$$



مثال

جاده‌ای باید از شهر A به شهر B ساخته شود، به‌طوری که ۴ km از آن (قطعهٔ MN) کنار ساحل باشد. اگر A و B در یک طرف خط ساحلی باشند، برای یافتن موقعیت این قطعه کدام تبدیل‌ها به کار می‌رود؟

پاسخ:

تمرین

نقطه‌های $A(۰,۳)$ و $B(۹,۳)$ در یک طرف محور xها هستند و $MN = ۴$ پاره‌خطی روی محور است. کمترین مقدار $AM + MN + NB$ را بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

$A(۰,۳)$ و $B(۹,۳)$ در یک طرف محور xها هستند و $MN = ۴$ روی محور است. کمترین طول $AMNB$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۹ ۳) $\sqrt{۶۱} + ۴$ ۴) $\sqrt{۸۵} + ۴$

پاسخ:

تست

در تیپ سوم نقطهٔ B را چگونه جابه‌جا می‌کنیم؟

۱) نسبت به خط بازتاب می‌دهیم

۲) به اندازهٔ L عمود بر خط انتقال می‌دهیم

۳) به اندازهٔ L در راستای خط و به سمت A انتقال می‌دهیم

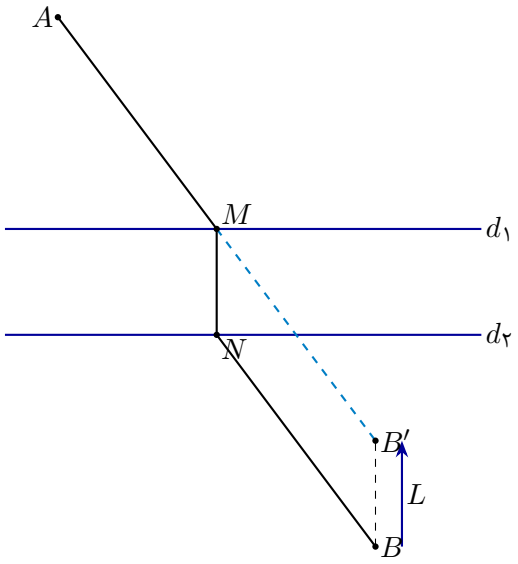
۴) حول A دوران می‌دهیم

پاسخ:

کاربرد مسئلهٔ هرون (تیپ چهارم)

دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصلهٔ L از هم داده شده‌اند. نقطه‌های A و B در دو طرف نوار بین آن‌ها قرار دارند. می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر $AMNB$ را بیابیم، به‌طوری که M روی d_1 و N روی d_2 و MN بر هر دو خط عمود باشد (مثلاً پلی عمود بر رودخانه). برای این کار B را به اندازهٔ L و عمود بر خط‌ها، به سمت A انتقال می‌دهیم تا B' به دست آید. AB' خط d_1 را در M قطع می‌کند و کمترین طول برابر است با

$$\min(AM + MN + NB) = AB' + L.$$



نکته

در حالت کمینه، زاویه‌های $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ در مسیر با هم برابرند و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته‌شده در دو طرف خط‌های d_1 و d_2 متشابه‌اند.

تمرین

دو خط $y = ۳$ و $y = ۱$ و نقطه‌های $A(۰, ۶)$ و $B(۸, -۳)$ مفروض‌اند. اگر MN بر دو خط عمود باشد (M روی $y = ۳$ و N روی $y = ۱$)، کمترین مقدار $AM + MN + NB$ چقدر است؟

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

دو خط $y=۳$ و $y=۱$ و نقطه‌های $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۳)$ مفروض‌اند و MN بر دو خط عمود است. کمترین طول $AMNB$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) $\sqrt{۸۵}+۲$ ۴) $\sqrt{۱۱۳}+۲$

پاسخ:

تست

در تیپ چهارم پس از انتقال B به B' (به اندازهٔ L عمود بر خط‌ها)، کمترین طول $AMNB$ برابر کدام است؟

۱) AB' ۲) $AB+L$ ۳) $A'B'$ ۴) $AB'+L$

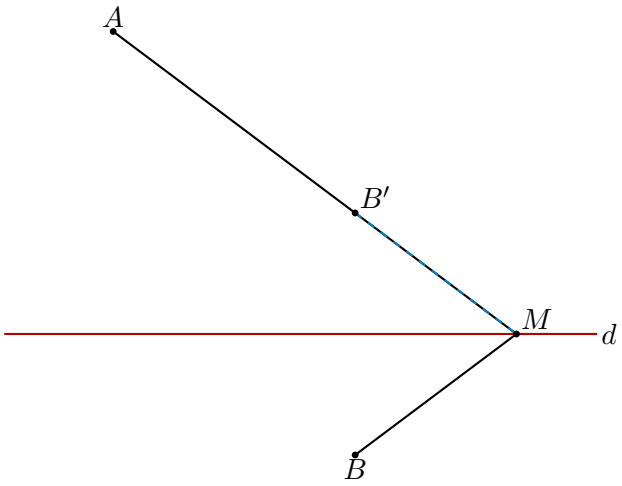
پاسخ:

کاربرد مسئلهٔ هرون (تیپ پنجم)

بیشینهٔ $|AM-MB|$. اگر A و B در دو طرف خط d باشند، B را نسبت به d بازتاب می‌دهیم تا B' به دست آید (حالا A و B' در یک طرف d هستند). امتداد AB' خط d را در M قطع می‌کند و در این حالت

$$\max|AM-MB|=AB'.$$

اگر A و B در یک طرف d باشند، نیازی به بازتاب نیست؛ امتداد AB خط d را در M قطع می‌کند و $\max|AM-MB|=AB$.



مثال

نقطه‌های $A(۱,۵)$ و $B(۵,-۲)$ در دو طرف محور xها هستند. نقطهٔ M روی محور xها چنان است که $|AM-MB|$ بیشترین مقدار را دارد. این مقدار را بیابید.

پاسخ:

تمرین

نقطه‌های $A(۱,۵)$ و $B(۴,۲)$ در یک طرف محور xها هستند. بیشترین مقدار $|AM-MB|$ را برای M روی محور xها بیابید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

بیشترین مقدار $|AM - MB|$ برای $A(۱, ۵)$ و $B(۵, -۲)$ و M روی محور xها کدام است؟

۱) $\sqrt{۶۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) ۷

پاسخ:

تست

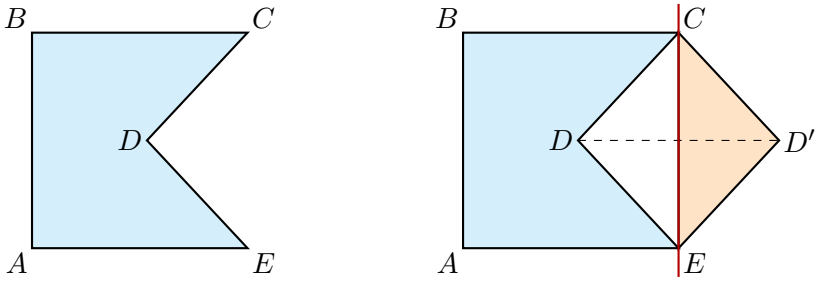
A و B در یک طرف خط d هستند. بیشترین مقدار $|AM - MB|$ با M روی d برابر کدام است؟

۱) AB' که B' بازتاب B است ۲) ۰ ۳) $\frac{AB}{۲}$ ۴) AB

پاسخ:

مسئلهٔ هم‌پیرامونی

اگر بخواهیم مساحت یک شکل را بدون تغییر محیط افزایش دهیم، از بازتاب استفاده می‌کنیم. این مسئله به **مسئلهٔ هم‌پیرامونی** مشهور است. اگر یک چندضلعی فرورفتگی داشته باشد (رأسی که زاویهٔ داخلی آن از ۱۸۰° بیشتر است)، آن رأس را نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاورش بازتاب می‌دهیم. محیط تغییر نمی‌کند و مساحت به اندازهٔ دو برابر مساحت مثلث ایجادشده افزایش می‌یابد.



در شکل بالا D' بازتاب D نسبت به خط CE است. محیط پنج‌ضلعی $ABCD'E$ با محیط $ABCDE$ برابر است ($CD' = CD$ و $ED' = ED$)، ولی مساحت آن به اندازهٔ $2S_{CDE}$ بیشتر است. اگر شکل چند فرورفتگی داشته باشد، با چند بار بازتاب می‌توان مساحت را بدون تغییر محیط بیشتر کرد.

تمرین

در مسئلهٔ هم‌پیرامونی، توضیح دهید چرا با بازتاب رأس فرورفته، محیط ثابت می‌ماند ولی مساحت زیاد می‌شود.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

با بازتاب رأس فرورفتهٔ یک چندضلعی نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاور، چه اتفاقی می‌افتد؟

۱) هر دو بیشتر می‌شوند ۲) محیط ثابت می‌ماند و مساحت بیشتر می‌شود ۳) محیط بیشتر و مساحت ثابت می‌شود ۴) هر دو ثابت می‌مانند

پاسخ:

تست

مثلث CDE که رأس D آن فرورفتگی است، مساحت ۵ دارد. با بازتاب D نسبت به CE، مساحت شکل چقدر زیاد می‌شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲.۵

پاسخ:

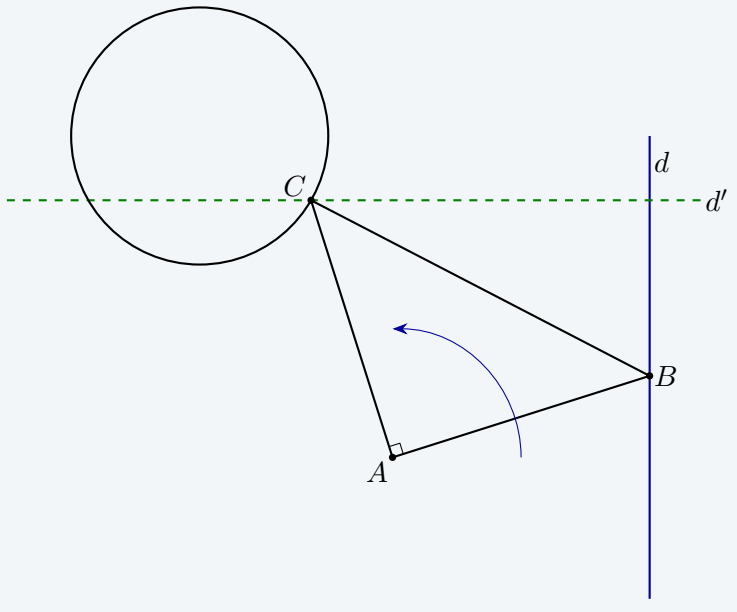
رسم‌های مهم

برای رسم یک شکل به کمک تبدیل‌ها، به کلیدواژه‌های مسئله دقت کنید:

- رسم پاره‌خط به اندازهٔ معین و موازی راستایی مشخص: **انتقال** (اندازهٔ بردار برابر با طول پاره‌خط است)؛
- رسم پاره‌خطی که نقطه‌ای آن را به نسبت معین تقسیم می‌کند: **تجانس** به مرکز آن نقطه (برای وسط پاره‌خط، نسبت تجانس -1 و می‌توان از دوران 180° هم استفاده کرد)؛
- رسم مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس معلوم: **دوران** با مرکز رأس و زاویهٔ همان زاویهٔ رأس (برای مثلث متساوی‌الاضلاع 60° و برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین 90°)؛
- رسم شکلی محاط در شکل دیگر: **تجانس**؛
- مسئله‌هایی که در آن‌ها عمودمنصف مطرح است: **بازتاب**.

مثال

خط d و دایره‌ای داده شده است. نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی با رأس قائمهٔ A رسم کنید که یک رأس آن روی d و رأس دیگر روی دایره باشد.



پاسخ:

نکته

هر مسئله‌ای که در آن صحبت از «عمودمنصف» است، به کمک بازتاب حل می‌شود. اگر A و B دو نقطه باشند که هر دو در یک طرف خط قرار دارند و بخواهیم نقطهٔ متحرکی روی خط، مجموع فاصله‌اش از آن‌ها کمینه شود، یعنی مسئلهٔ هرون.

تمرین

با کدام تبدیل می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخت که رأس A آن نقطه‌ای معلوم، رأس B روی خطی معلوم و رأس C روی دایره‌ای معلوم باشد؟ مراحل را توضیح دهید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با یک رأس معلوم و دو رأس روی دو شکل داده‌شده، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟

۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) دوران 60° ۴) تجانس

پاسخ:

تست

برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با رأس قائمهٔ معلوم، کدام تبدیل مناسب است؟

۱) دوران 45° ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) دوران 90°

پاسخ: