دایره

در این فصل ابتدا مفاهیم اولیهٔ دایره و زاویه‌های مرتبط با آن را مرور می‌کنیم، سپس رابطه‌های طولی در دایره و وضعیت دو دایره را بررسی می‌کنیم و در پایان به چندضلعی‌های محاطی و محیطی می‌پردازیم.

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

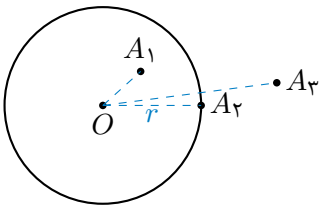
تعریف

مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصلهٔ ثابت هستند، **دایره** نامیده می‌شود. نقطهٔ ثابت را **مرکز** و مقدار ثابت را **شعاع** دایره می‌نامند.

دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهیم. مثلاً $C(M,۴)$ یعنی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۴.

وضعیت نقطه و دایره

فرض کنید نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,r)$ داده شده‌اند:



قانون

- اگر $OA < r$ باشد، نقطهٔ A **درون** دایره قرار دارد.
- اگر $OA = r$ باشد، نقطهٔ A **روی** دایره قرار دارد.
- اگر $OA > r$ باشد، نقطهٔ A **خارج** دایره قرار دارد.

تست

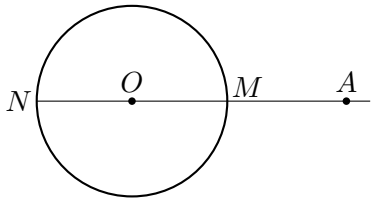
فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره‌ای به شعاع $۲x+۱$ برابر $۳x-۵$ است. اگر نقطهٔ A خارج این دایره باشد، حدود x کدام است؟

۱) $۱ < x < ۳$ ۲) $x \leq ۶$ ۳) $x > ۶$ ۴) $۱ \leq x < ۶$

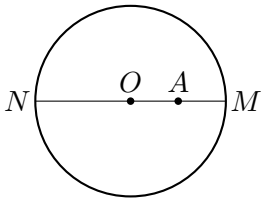
پاسخ:

فاصلهٔ نقطه تا دایره

برای پیدا کردن نقاطی از دایره که کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله را از نقطهٔ A دارند، کافی است قطر گذرنده از A را رسم کنیم؛ نقاط تقاطع این خط با دایره، نقاط مطلوب‌اند.



دایره خارج A



دایره درون A

	A درون دایره	A خارج دایره
کم‌ترین فاصله	$R-OA$	$OA-R$
بیش‌ترین فاصله	$R+OA$	$OA+R$

تست

کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایرهٔ C به‌ترتیب برابر ۳ و ۷ است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ یا ۵ ۲) ۲ یا ۵ ۳) ۲ یا ۴ ۴) ۴ یا ۶

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

نقطهٔ A با $OA=۴$ نسبت به دایرهٔ $C(O,۶)$ چه وضعیتی دارد؟

۱) درون دایره ۲) روی دایره ۳) بیرون دایره ۴) نمی‌توان گفت

پاسخ:

تست

فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ برابر ۱۳ است. کم‌ترین فاصلهٔ A تا نقاط دایره چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۳ ۴) ۱۸

پاسخ:

تست

نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ A تا نقاط دایره به‌ترتیب ۱۱ و ۳ باشد، R چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۴

پاسخ:

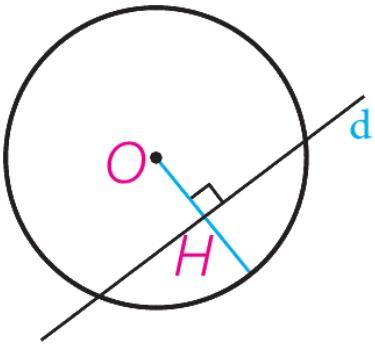
اوضاع نسبی خط و دایره

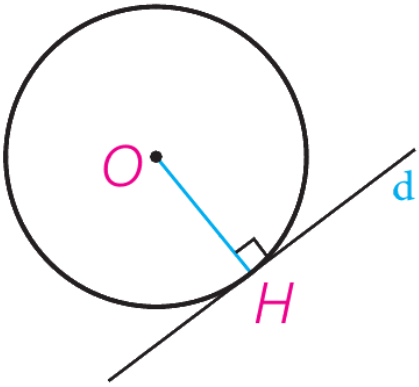
تعریف

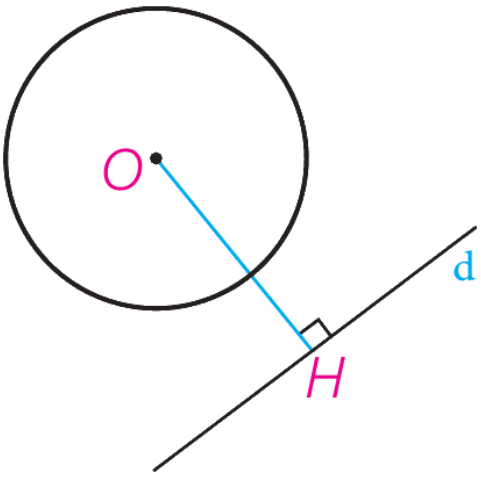
خطی که دایره را فقط در یک نقطه قطع کند، **مماس** بر دایره و آن نقطه، **نقطهٔ تماس** نام دارد. خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند، **قاطع** و خطی که با دایره نقطهٔ مشترک نداشته باشد، **متخارج** (خارج دایره) نامیده می‌شود. مماس همواره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است.

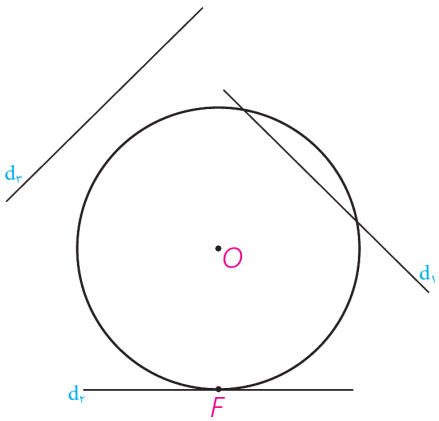
خط d و دایرهٔ $C(O,r)$ مفروض‌اند و H پای عمود وارد از O بر d است. در این صورت خط و دایره نسبت به هم سه وضعیت مختلف دارند:

متقاطع	مماس	متخارج
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$
دو نقطهٔ اشتراک	یک نقطهٔ اشتراک	بدون نقطهٔ اشتراک


O
H
d

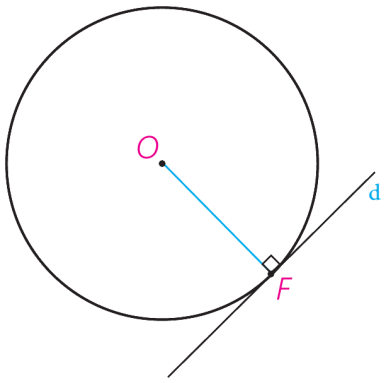

O
H
d


O
H
d


O
F
d۱
d۲
d۳

قضیه

یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



تست

فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O, ۷-۲x)$ تا خط d برابر $x+۱$ است. به ازای کدام مقدار x خط d دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ:

فاصلهٔ خط و دایره

اگر خط d دایرهٔ $C(O, R)$ را قطع نکند، بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط d برابر است با

$$\text{Max} = OH + R, \qquad \text{Min} = OH - R$$

نکته

اگر مقدار $OH - R$ عددی صفر یا منفی به دست آید، خط و دایره مماس یا متقاطع‌اند. در این حالت کم‌ترین فاصلهٔ خط و دایره صفر است.

تست

فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O, ۴)$ تا خط d برابر ۵ است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط d کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۹ ۴) ۲.۵

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

خطی به فاصلهٔ ۳ از مرکز دایرهٔ $C(O, ۵)$ قرار دارد. این خط و دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ:

تست

فاصلهٔ خط d از مرکز دایره‌ای به شعاع ۷ برابر $۲k + ۱$ است. به‌ازای چه k ی خط بر دایره مماس است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ:

تست

فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O, ۳)$ تا خط d برابر ۸ است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط d چقدر است؟

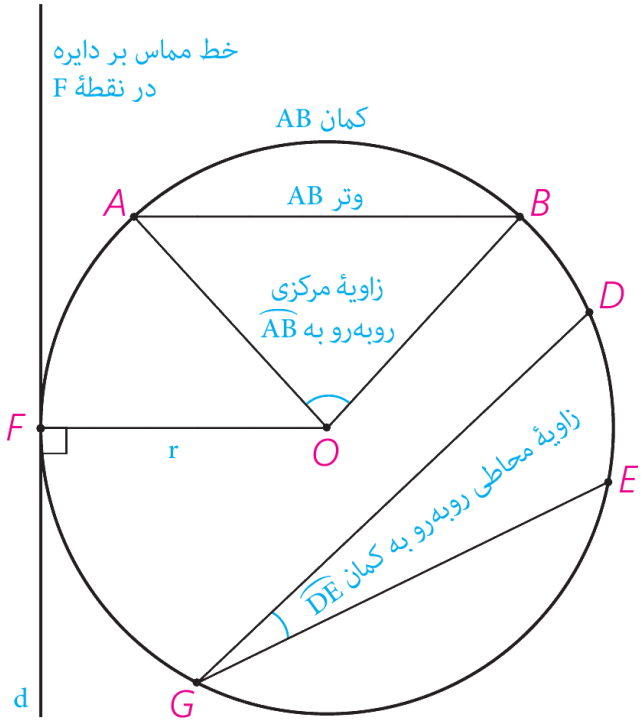
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۱

پاسخ:

مفاهیم مرتبط با دایره

تعریف

- **شعاع**: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.
- **وتر**: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.
- **قطر**: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد (بزرگ‌ترین وتر دایره).
- **زاویهٔ مرکزی**: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد.
- **زاویهٔ محاطی**: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش شامل دو وتر از دایره باشد.
- **کمان**: قسمتی از دایره که به دو نقطهٔ A و B روی دایره محدود شده است و با $\overset{\frown}{AB}$ نشان داده می‌شود. منظور از $\overset{\frown}{AB}$ همان کمان کوچک‌تر مشخص‌شده توسط A و B است.

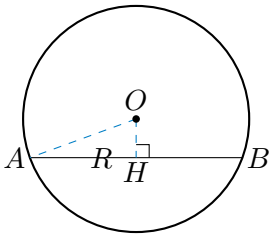


وتر در دایره

قانون

- خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود شود، آن وتر را نصف می‌کند و برعکس، خطی که از مرکز دایره و وسط یک وتر می‌گذرد، بر آن وتر عمود است.
- در شکل زیر (با رابطهٔ فیثاغورس) بین شعاع، طول وتر و فاصلهٔ مرکز تا وتر رابطهٔ زیر برقرار است:

$$R^۲ = OH^۲ + \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲$$



تست

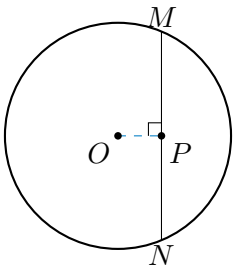
در دایرهٔ $C(O,۵)$ فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB برابر ۴ است. طول وتر AB چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ:

وتر مینیمم

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ P درون دایرهٔ $C(O,R)$، وتری است که در نقطهٔ P بر شعاع گذرا از نقطهٔ P عمود باشد. نقطهٔ P وسط این وتر است. این وتر را **وتر مینیمم** گذرا از نقطهٔ P نیز می‌نامند.



تست

نقطهٔ P وسط یکی از شعاع‌های دایرهٔ $C(O,۶)$ قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتر دایره که از نقطهٔ P می‌گذرد، چقدر است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) ۶

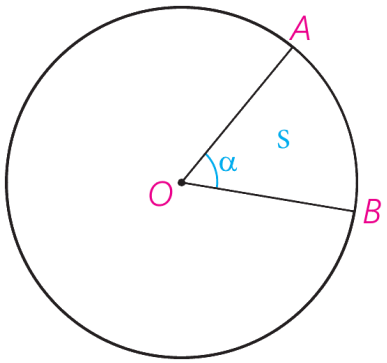
پاسخ:

زاویهٔ مرکزی و کمان

تعریف

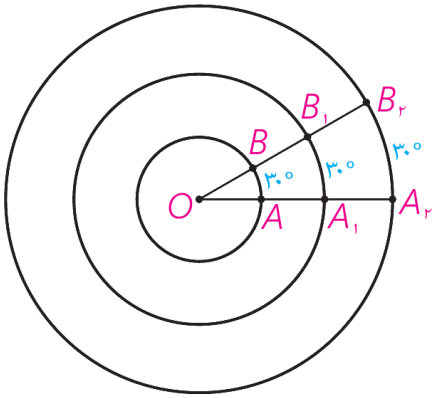
قسمتی از دایره که به دو نقطهٔ A و B روی دایره محدود شده است، **کمان** $\overset{\frown}{AB}$ نامیده می‌شود. زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد، **زاویهٔ مرکزی** نام دارد. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$، با اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر است:

$$\alpha = \widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$$



نکته

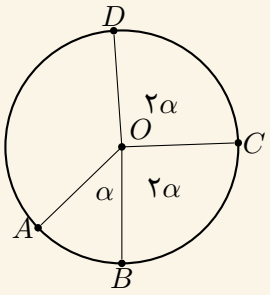
محیط یک دایره، یک کمان به اندازهٔ ۳۶۰° است؛ یعنی اگر محیط دایره به چند کمان تقسیم (افراز) شود، مجموع اندازهٔ این کمان‌ها برابر ۳۶۰° خواهد بود. کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.



تست

مطابق شکل، اگر O مرکز دایره و کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ برابر ۲α و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر α و $\overset{\frown}{AD} = ۱۳۰^\circ$ باشد، مقدار α چند درجه است؟

۱) ۵۸ ۲) ۴۱ ۳) ۵۳ ۴) ۴۶



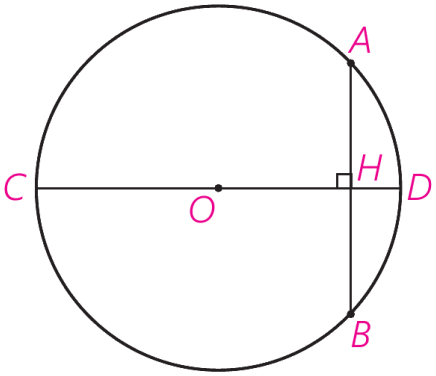
پاسخ:

قطر عمود بر وتر

قضیه

قطر عمود بر وتر، وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس:

- اگر از مرکز دایره به وسط وتری در همان دایره وصل کنیم، از وسط کمان‌های نظیر آن وتر می‌گذرد.
- خطی که وسط یک وتر و وسط کمان نظیر همان وتر را از دایره به هم وصل کند، از مرکز دایره می‌گذرد و بر آن وتر عمود است.



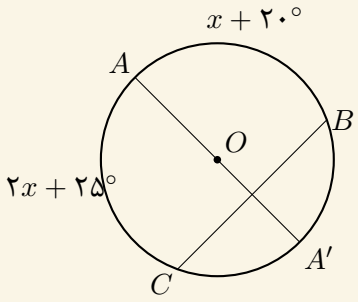
نکته

هر قطر دایره که رسم شود، دو کمان ۱۸۰° به وجود می‌آورد.

تست

در شکل زیر AA' قطر عمود بر وتر BC است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ چقدر است؟ (اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = ۲x + ۲۵^\circ$ و $\overset{\frown}{A'B} = \overset{\frown}{A'C} = x + ۲۰^\circ$ است.)

۱) ۱۲۵° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۳۵° ۴) ۱۳۰°



پاسخ:

وتر و کمان

قضیه

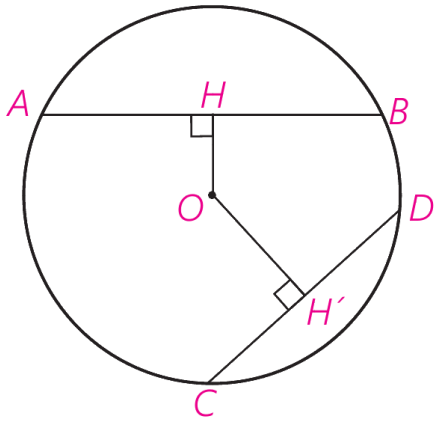
وترهای مساوی در دایره، کمان‌های برابر دارند و از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. یعنی

$$AB = CD \iff \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \iff OH = OH'$$

قضیه

از دو وتر نامساوی در دایره، آن که بزرگ‌تر است، کمان بزرگ‌تر دارد و به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس:

$$AB > CD \iff \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \iff OH < OH'$$



تست

در شکل مقابل اگر $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ باشد، شعاع دایره چقدر است؟ (فاصلهٔ O از وتر AB برابر $x+۲$، فاصلهٔ O از وتر CD برابر $۲x$ و نصف وتر CD برابر $x+۱$ است.)

۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۶

پاسخ:

تمرین

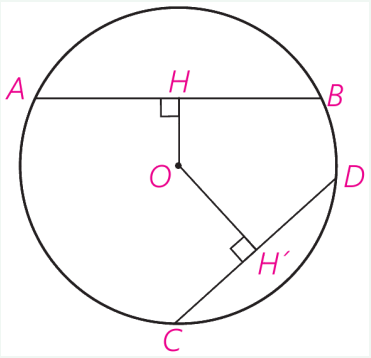
در دایرهٔ $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$. فاصلهٔ O از وتر AB را به‌دست آورید.

پاسخ:

تمرین

در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند).

راهنمایی: از O به B و C وصل کنید و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در دایرهٔ $C(O,۱۳)$ فاصلهٔ مرکز تا وتر AB برابر ۵ است. طول AB کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ:

تست

وتری به طول ۱۶ در دایره‌ای به شعاع ۱۰ رسم شده است. فاصلهٔ مرکز دایره تا این وتر چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

نقطهٔ P درون دایرهٔ $C(O, ۱۰)$ و $OP = ۶$ است. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

پاسخ:

تست

در یک دایره دو وتر AB و CD برابرند. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۳x + ۱۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD} = ۵x - ۳۰^\circ$ باشد، x کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ:

زاویهٔ محاطی

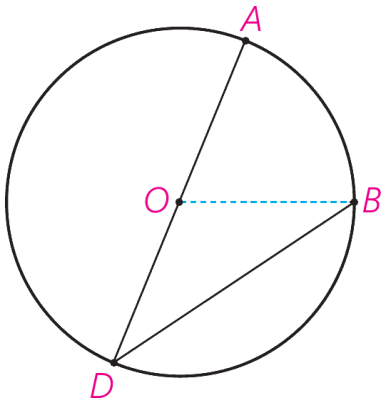
تعریف

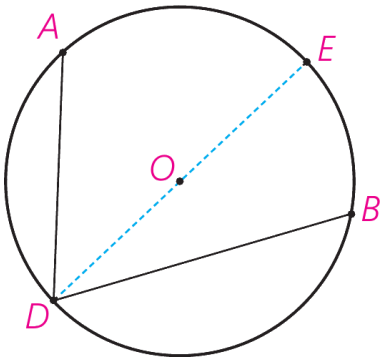
زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشد، **زاویهٔ محاطی** نامیده می‌شود.

قضیه

اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به زاویه:

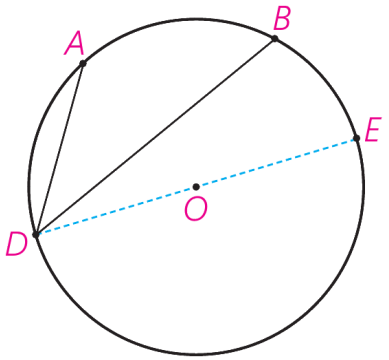
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$





قانون

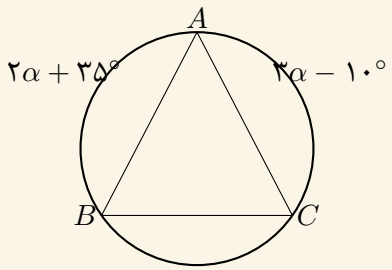
- اگر دو زاویهٔ محاطی روبه‌رو به یک کمان باشند، برابرند.
- اگر یک زاویهٔ محاطی و یک زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان باشند، آن‌گاه زاویهٔ مرکزی دو برابر زاویهٔ محاطی است.
- زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر، قائمه است (۹۰°).



تست

در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟ ($\overset{\frown}{AB} = ۲\alpha + ۳۵^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۳\alpha - ۱۰^\circ$ و $AB = AC$)

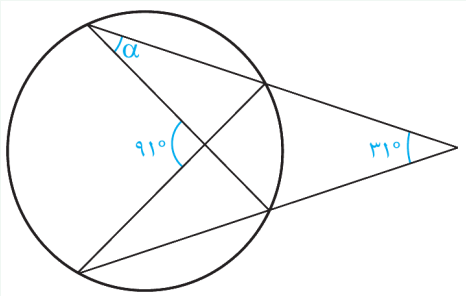
۱) ۴۵° ۲) ۵۵° ۳) ۴۰° ۴) ۶۰°



پاسخ:

تمرین

در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

زاویهٔ محاطی مقابل به کمان ۱۱۰° چند درجه است؟

۱) ۵۵° ۲) ۱۱۰° ۳) ۲۲۰° ۴) ۷۰°

پاسخ:

تست

در دایره‌ای AB قطر است و C نقطه‌ای روی دایره است. زاویهٔ $\hat{C}$ در مثلث ABC چند درجه است؟

۱) ۴۵° ۲) ۶۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°

پاسخ:

تست

زاویهٔ محاطی $x + ۱۰^\circ$ مقابل به کمان $۳x - ۲۰^\circ$ است. x کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

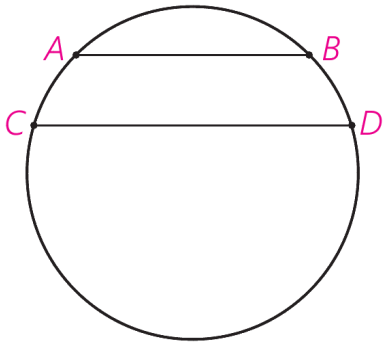
پاسخ:

کمان‌های محدود بین دو وتر

قضیه

کمان‌های محدود بین دو وتر موازی در دایره با هم برابرند:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$



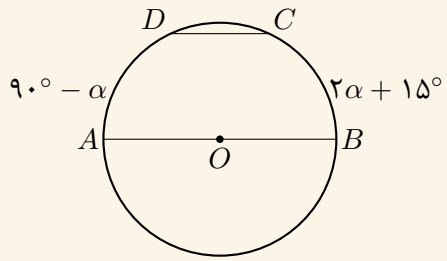
نکته

عکس این گزاره درست نیست؛ یعنی اگر دو سر دو کمان برابر باشند، وترهایی که دو سر این کمان‌ها را به هم وصل می‌کنند لزوماً موازی نیستند!

تست

در شکل زیر AB قطر دایره است و $CD \parallel AB$. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ چقدر است؟ ($\overset{\frown}{AD} = ۹۰^\circ - \alpha$ و $\overset{\frown}{BC} = ۲\alpha + ۱۵^\circ$)

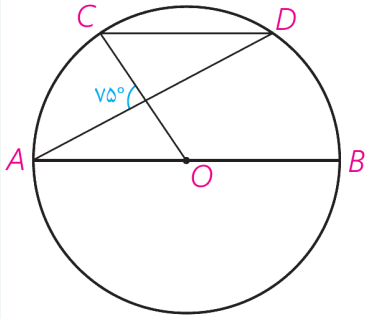
۱) ۶۵° ۲) ۷۵° ۳) ۵۰° ۴) ۶۰°



پاسخ:

تمرین

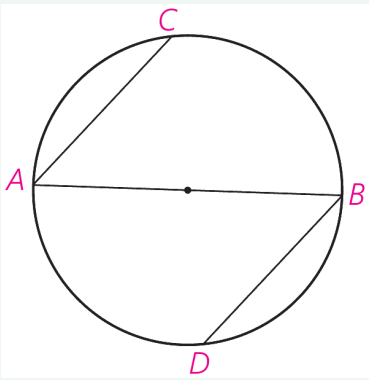
در دایرهٔ رسم‌شده، $AB \parallel CD$. اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید.



پاسخ:

تمرین

در شکل مقابل AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید $AC = BD$.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در یک دایره $AB \parallel CD$ است. اگر $\overset{\frown}{AC} = 3x + 5^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = 5x - 25^\circ$ باشد، x کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ:

تست

CD قطر دایره‌ای به مرکز O و وتر AB موازی آن است (هر دو در یک طرف). اگر $A\hat{O}B = 80^\circ$ باشد، $\overset{\frown}{AC}$ چند درجه است؟

۱) 40° ۲) 50° ۳) 60° ۴) 100°

پاسخ:

زاویهٔ ظلی

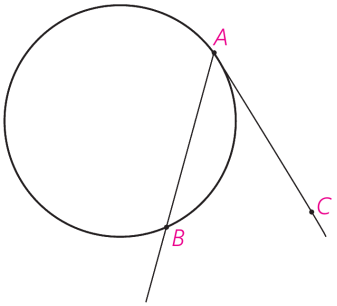
تعریف

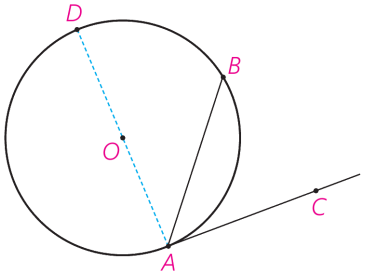
زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش شامل وتری از دایره باشد، **زاویهٔ ظلی** نامیده می‌شود.

قضیه

اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه:

$$\widehat{ATB} = \frac{\overset{\frown}{TMB}}{۲}$$

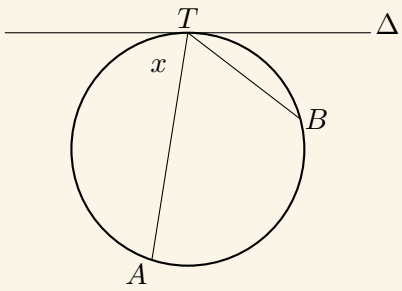




تست

در شکل زیر خط Δ در نقطهٔ T بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ x چقدر است؟ ($\overset{\frown}{TB} = ۷۵°$ و $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۳°$)

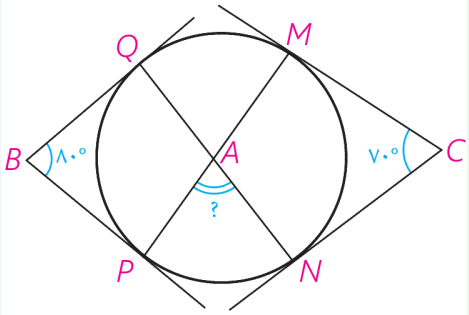
۱) $۷۹°$ ۲) $۸۱°$ ۳) $۷۴°$ ۴) $۶۷°$



پاسخ:

تمرین

در شکل مقابل اضلاع زوایای B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

اندازهٔ زاویهٔ ظلی مقابل به کمان ۱۳۰° کدام است؟

۱) ۶۵° ۲) ۱۳۰° ۳) ۵۰° ۴) ۲۶۰°

پاسخ:

تست

خط AT در نقطهٔ A بر دایره مماس و $T\hat{A}B = ۴۰^\circ$ است. اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$ کدام است؟

۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۸۰° ۴) ۱۴۰°

پاسخ:

تست

زاویهٔ ظلی $x + ۱۵^\circ$ مقابل به کمان $۳x - ۱۰^\circ$ است. x کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

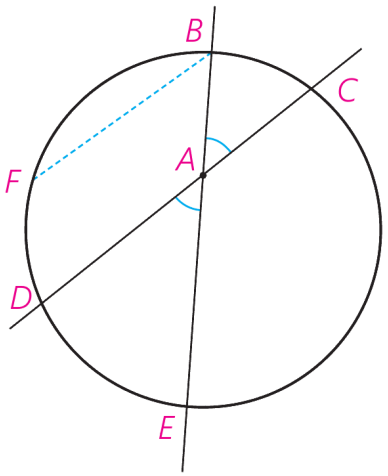
پاسخ:

زاویهٔ بین دو وتر و امتداد دو وتر

قضیه

زاویهٔ بین دو وتر که درون دایره همدیگر را قطع کنند، برابر است با **نصف مجموع** کمان‌های مقابل به آن زاویه:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

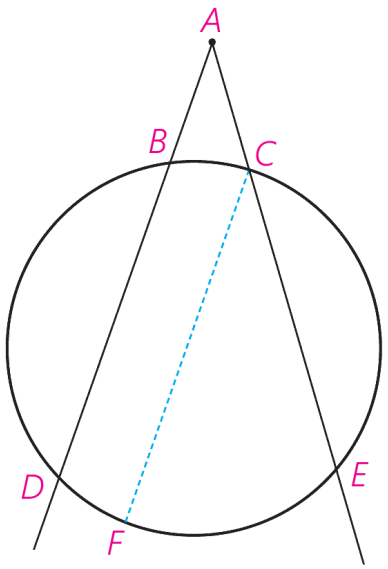


قضیه

زاویهٔ بین امتداد دو وتر که در نقطه‌ای خارج از دایره همدیگر را قطع کرده‌اند، برابر است با **نصف تفاضل**

کمان‌های مقابل به آن زاویه:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AA'} - \overset{\frown}{BB'}}{۲}$$



قضیه

در حالت خاصی که یکی از اضلاع زاویه، مماس بر دایره و ضلع دیگر، دایره را قطع کند، زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس برابر است با نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه:

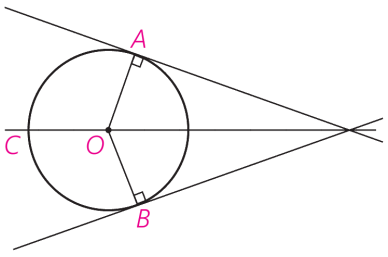
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TB} - \overset{\frown}{TA}}{۲}$$

قضیه

اگر هر دو ضلع زاویه بر دایره مماس باشند، اندازهٔ زاویهٔ بین دو مماس برابر است با نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{AQB}}{۲}$$

(در شکل، P و Q برای نام‌گذاری کمان‌ها انتخاب شده‌اند.)



نکته

در بعضی از مسائل مربوط به زاویه‌ها در دایره، گفته می‌شود «اندازهٔ یک پاره‌خط برابر شعاع دایره است». در این موارد، معمولاً شعاع‌هایی از دایره که به نقاط اصلی در شکل وصل می‌شود را رسم کرده و به کمک مثلث‌های متساوی‌الساقین به‌وجود آمده در شکل، مسئله را حل می‌کنیم.

مثال

اگر از نقطهٔ M خارج دایره، خطی دایره را در A و B قطع کند و $MA = R$ باشد، بهتر است از مرکز دایره به نقاط A، B و (در حالت مماس) T وصل کنیم تا بتوانیم به کمک مثلث‌های متساوی‌الساقین ایجادشده، زاویهٔ x را به‌دست آوریم.

پاسخ:

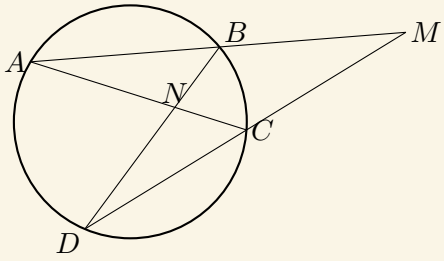
جمع‌بندی تمام زاویه‌های مربوط به دایره

زاویه	ویژگی	رابطه
مرکزی	برابر با کمان مقابل	$\alpha = \overset{\frown}{AB}$
محاطی	برابر با نصف کمان مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$
ظلی	برابر با نصف کمان مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$
بین دو وتر	نصف مجموع کمان‌های مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$
بین امتداد دو وتر	نصف تفاضل کمان‌های مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$
بین وتر و مماس	نصف تفاضل کمان‌های مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$
بین دو مماس	نصف تفاضل کمان‌های مقابل	$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{۲}$

تست

مطابق شکل، $\hat{M} = ۲۷^\circ$ و $\hat{N} = ۷۱^\circ$ می‌باشد، کمان $\overset{\frown}{AD}$ چند درجه است؟ (خط‌های AB و DC از M می‌گذرند و وترهای AC و BD در N متقاطع‌اند.)

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۰۴



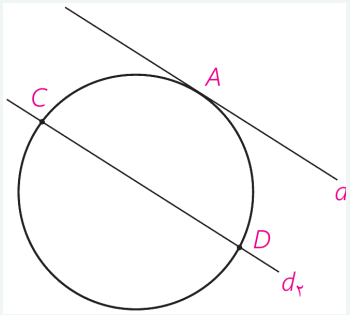
پاسخ:

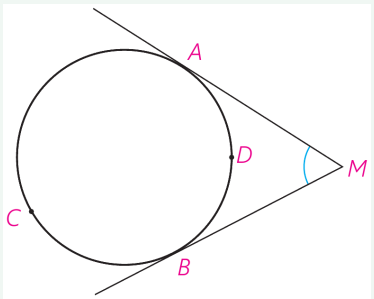
تمرین

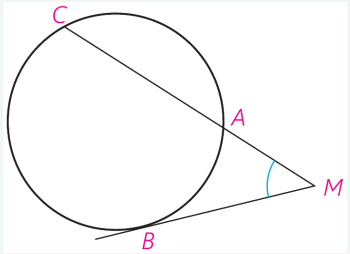
در شکل‌های زیر ثابت کنید: الف) $d_۱ \parallel d_۲$ ؛ ثابت کنید $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ ب) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$

پ) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

راهنمایی: در قسمت‌های (ب) و (پ) از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



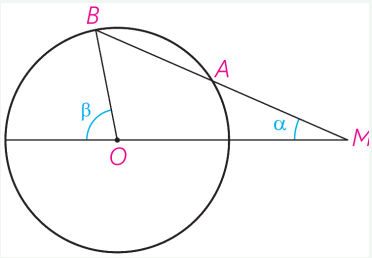




پاسخ:

تمرین

دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA=R$؛ نشان دهید $\beta=۳\alpha$.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

دو وتر درون دایره متقاطع‌اند و کمان‌های مقابل زاویهٔ بین آن‌ها ۷۰° و ۵۰° است. این زاویه چند درجه است؟

۱) ۲۰° ۲) ۶۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۰°

پاسخ:

تست

امتداد دو وتر در نقطه‌ای خارج دایره متقاطع‌اند و کمان‌های مقابل آن زاویه ۱۲۰° و ۴۰° است. اندازهٔ زاویه کدام است؟

۱) ۸۰° ۲) ۱۶۰° ۳) ۴۰° ۴) ۲۰°

پاسخ:

تست

از نقطهٔ M خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم شده و کمان‌های مقابل زاویهٔ M برابر ۱۵۰° و ۵۰° است. $\hat{M}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۲۰۰° ۳) ۵۰° ۴) ۲۵°

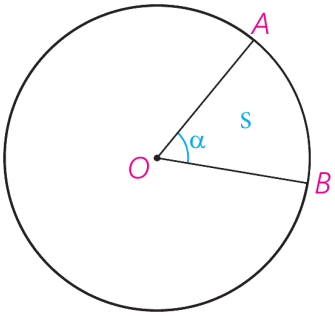
پاسخ:

طول کمان

قانون

محیط یک دایره $۲\pi R$ و اندازهٔ آن ۳۶۰° است؛ پس طول کمانی به اندازهٔ α درجه از یک دایره به شعاع R برابر است با

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$



نکته

برای محاسبهٔ مجموع طول دو کمان از یک دایره، ابتدا زاویه‌های آن دو کمان را با هم جمع می‌کنیم، سپس طول کمان زاویهٔ جدید را به‌دست می‌آوریم. (این رابطه برای تفاضل هم برقرار است.)

تست

تفاضل طول کمان‌های نظیر زاویه‌های ۳۳° و ۷۸° در یک دایره به شعاع ۶ چقدر است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

طول کمان ۶۰° از دایره‌ای به شعاع ۶ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) ۶π

پاسخ:

تست

در دایره‌ای طول کمان ۱۵۰° برابر ۵π است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

در دایره‌ای به شعاع ۴ طول یک کمان 2π است. اندازهٔ این کمان چند درجه است؟

۱) 45° ۲) 60° ۳) 90° ۴) 180°

پاسخ:

تست

طول وتر محدود به کمان 120° در دایره‌ای به شعاع ۸ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) ۱۶

پاسخ:

وترهای خاص

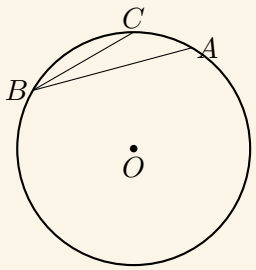
برای به‌دست آوردن طول یک وتر با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ مرکزی، از مرکز دایره به دو سر آن وتر وصل می‌کنیم و از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ایجادشده استفاده می‌کنیم. طول وترهایی از دایره‌ای به شعاع R که محدود به کمان‌های 60°، 90° و 120° هستند بدون استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها قابل محاسبه است:

اندازهٔ کمان	60°	90°	120°
طول وتر	R	$\sqrt{2}\,R$	$\sqrt{3}\,R$
شکل	شش‌ضلعی منتظم	مربع	مثلث متساوی‌الاضلاع

تست

در دایرهٔ مقابل اگر $BC = R = \sqrt{۲}$ و $AB = ۲$، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ چقدر است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۱۵° ۴) ۲۲.۵°



پاسخ:

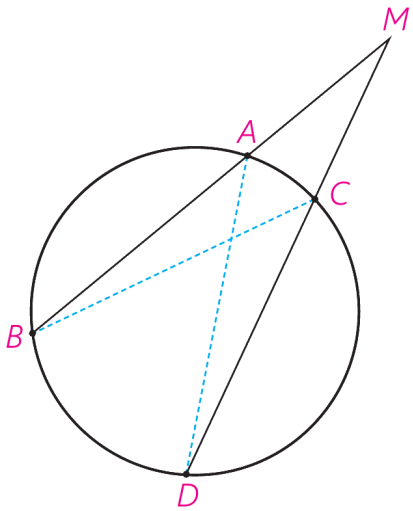
رابطه‌های طولی در دایره

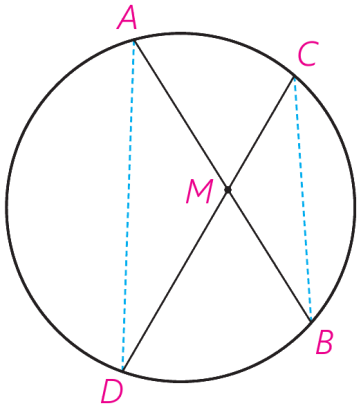
رابطه‌های طولی در دایره

قضیه

اگر دو وتر یا امتداد آن‌ها در نقطه‌ای مانند M متقاطع باشند (درون یا بیرون دایره)، آن‌گاه حاصل‌ضرب قطعات به‌وجود آمده روی دو وتر با هم برابر است:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



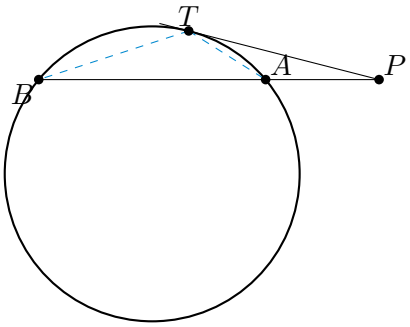


قضیه

اگر از یک نقطهٔ خارج از دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود، حاصل‌ضرب قطعات ایجادشده روی قاطع برابر مربع طول مماس است:

$$PT^{۲} = PA \cdot PB$$

(یعنی طول مماس، **واسطهٔ هندسی** بین دو قطعهٔ قاطع است؛ منظور از واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b عدد $\sqrt{ab}$ است. همچنین **قاطع**، خطی است که دایره را در دو نقطه قطع می‌کند و در اینجا PA و PB قطعه‌های قاطع‌اند.)



قضیه

اگر فاصلهٔ نقطهٔ M واقع بر وتر AB (یا امتداد وتر AB) تا مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ برابر d باشد، آن‌گاه رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$MA \cdot MB = |d^{۲} - R^{۲}|$$

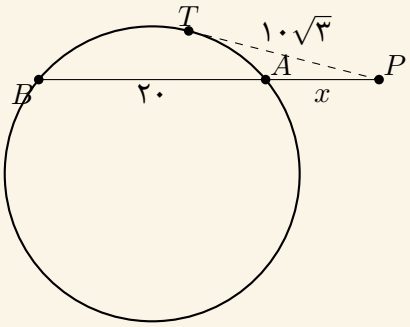
نکته

عدد $d^{۲} - R^{۲}$ را **قوت نقطهٔ** M نسبت به دایره می‌نامند که یک شاخص مهم در روابط طولی دایره به حساب می‌آید.

تست

در شکل مقابل PT بر دایره مماس است. طول PA کدام است؟ ($PT = ۱۰\sqrt{۳}$ و $AB = ۲۰$)

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰



پاسخ:

تشابه در دایره

قضیه

اگر مطابق شکل دو زاویهٔ A_1 و A_2 برابر باشند، آن‌گاه مثلث‌های ABD و ACE متشابه‌اند. به‌طور کلی، مثلث‌های محصور بین دو وتر متقاطع، دو وتر و امتداد دو وتر یا یک وتر و یک مماس با هم متشابه هستند:

دو وتر متقاطع درون دایره	امتداد دو وتر	مماس و قاطع
$MAB \sim MCD$ (وتر درون)	$MAB \sim MCD$ (بیرون)	$PTA \sim PBT$

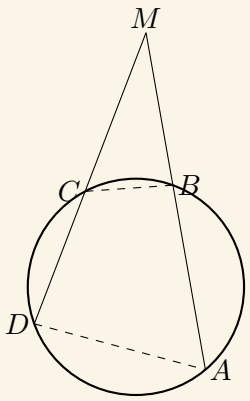
نکته

این تیپ تست‌ها گاهی با روابط طولی نیز ترکیب می‌شوند.

تست

در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ درون دایره محیط شده است، طول AD کدام است؟ (خط‌های MB و MC به‌ترتیب با MA و MD یک امتداد دارند؛ $MB = ۳$، $BA = ۵$، $CD = ۲$ و $BC = ۴$)

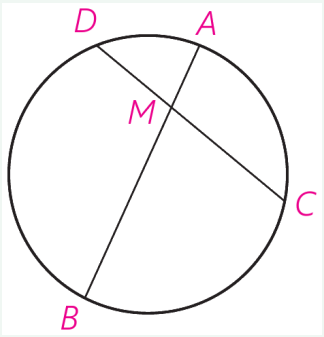
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



پاسخ:

تمرین

در دایرهٔ $C(O,R)$، وتر AB و وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱$ □□، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



پاسخ:

تمرین

از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

دو وتر AB و CD در نقطهٔ M درون دایره متقاطع‌اند. اگر $MA = ۴$، $MB = ۶$ و $MC = ۳$ باشد، MD کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

از نقطهٔ P خارج دایره مماس $PT = ۶$ و قاطع PAB رسم شده است. اگر $PA = ۴$ باشد، طول AB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

پاسخ:

تست

نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O, ۱۰)$ و $OM = ۶$ است. حاصل‌ضرب دو قطعهٔ هر وتر گذرنده از M کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۴ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۳۶

پاسخ:

تست

از نقطهٔ P قاطعی رسم شده است که $PA = ۳$ و $AB = ۹$ است. طول مماس رسم‌شده از P بر دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ:

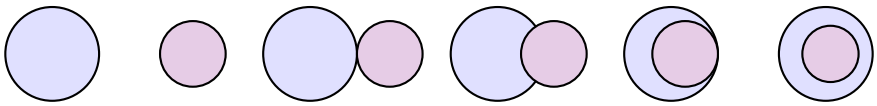
وضعیت دو دایره

تعریف

خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند **خط‌المرکزین** نام دارد و طول پاره‌خط OO' را با d نشان می‌دهیم. دو دایره را **مماس خارج** گویند هرگاه یک نقطهٔ مشترک داشته باشند و هر کدام بیرون دیگری باشد؛ **مماس داخل** هرگاه یک نقطهٔ مشترک داشته باشند و یکی درون دیگری باشد؛ **متخارج** هرگاه نقطهٔ مشترک نداشته باشند و بیرون هم باشند و **متداخل** هرگاه نقطهٔ مشترک نداشته باشند و یکی درون دیگری باشد.

اگر طول خط‌المرکزین دو دایره برابر d باشد، برای بررسی وضعیت دو دایره، کافی است d را با مجموع و قدر مطلق تفاضل دو شعاع مقایسه کنیم که ۵ وضعیت مختلف رخ می‌دهد:

وضعیت	رابطه	تعداد مماس مشترک
متخارج (بیرون هم)	$d > R_۱ + R_۲$	$۲ + ۲$
مماس خارج	$d = R_۱ + R_۲$	$۲ + ۱$
متقاطع	$\|R_۱ - R_۲\| < d < R_۱ + R_۲$	$۲ + ۰$
مماس داخل	$d = \|R_۱ - R_۲\|$	$۱ + ۰$
متداخل	$d < \|R_۱ - R_۲\|$	$۰ + ۰$



نکته

تعداد مماس مشترک‌ها در هر وضعیت، یک عدد صحیح در بازهٔ $[۰, ۴]$ است؛ بنابراین از روی تعداد مماس مشترک‌ها وضعیت دو دایره قابل تشخیص است. وقتی تعداد مماس مشترک‌های دو دایره برابر یک است، یعنی دو دایره مماس داخل‌اند.

تست

دو دایرهٔ $C(O, r)$ و $C'(O', ۳)$ مماس خارج‌اند. اگر $OO' = ۲r + ۱$ باشد، r کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

فاصلهٔ دو دایره

اگر در دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',r)$ طول خط‌المرکزین برابر d باشد و بدانیم $r<R$ است، در این صورت کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره مطابق جدول زیر است:

بیش‌ترین فاصله	کم‌ترین فاصله
$\text{Max}=d+R+r$	$\text{Min}=\lvert d-R\rvert -r$

با توجه به جدول فوق، قطر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',r)$ برابر است با

(بزرگ‌ترین) $MN=d+R+r$ (کوچک‌ترین) $MN=\lvert d-R\rvert -r$

تست

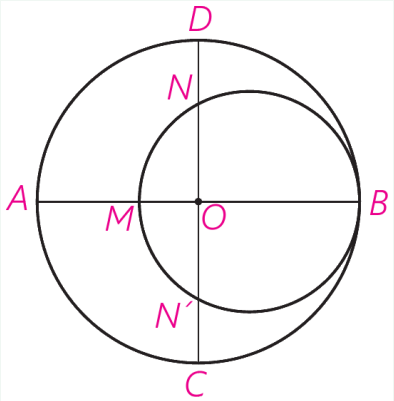
دو دایرهٔ $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ مفروض‌اند. اگر طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۱۰ باشد، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ:

تمرین

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM=۱۶$ و $ND=۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



پاسخ:

تمرین

طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

شعاع‌های دو دایره ۷ و ۳ و طول خط‌المرکزین ۱۰ است. وضعیت دو دایره چیست؟

۱) متخارج ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) مماس داخل

پاسخ:

تست

شعاع‌های دو دایره ۸ و ۳ و طول خط‌المرکزین ۴ است. وضعیت دو دایره چیست؟

۱) مماس داخل ۲) متقاطع ۳) متداخل ۴) متخارج

پاسخ:

تست

دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۳ متقاطع‌اند. طول خط‌المرکزین کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ:

تست

دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۲ متخارج‌اند و طول خط‌المرکزین ۱۲ است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۹

پاسخ:

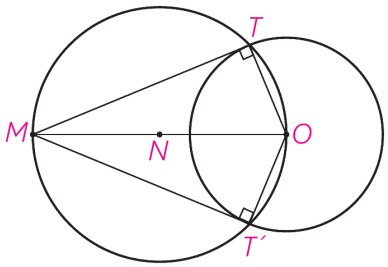
مماس بر دایره

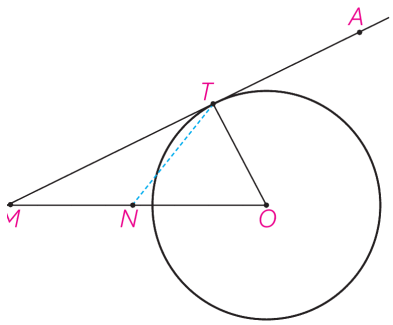
نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ A خارج دایره باشد، از نقطهٔ A دو مماس و اگر نقطهٔ A روی دایره باشد، از نقطهٔ A یک مماس بر دایره می‌توان رسم کرد. اما اگر نقطهٔ A داخل دایره باشد، از نقطهٔ A هیچ مماسی بر دایره نمی‌توان رسم کرد.

A درون دایره	A روی دایره	A خارج دایره
صفر مماس	یک مماس	دو مماس

- برای رسم خط مماس بر دایره از نقطهٔ A روی دایره، باید خط عمود بر شعاع OA در نقطهٔ A را رسم کنیم.

- برای رسم خط‌های مماس بر دایره از نقطهٔ A خارج دایره باید ابتدا دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع این دایره با دایرهٔ اصلی، نقاط تماس را به ما می‌دهد و کافیست از A به آن‌ها وصل کنیم.





قضیه

شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است؛ بنابراین اگر از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شود و از مرکز دایره به نقاط تماس وصل کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌دست می‌آید:

- OM نیمساز زاویهٔ $\widehat{TMT'}$ است.
- OM عمودمنصف TT' است.
- TH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM است.

چون مثلث‌های OAT و OAT' همنهشت هستند، پس طول دو مماسی که از خارج دایره بر آن رسم می‌شود، برابر هستند ($AT = AT'$).

تست

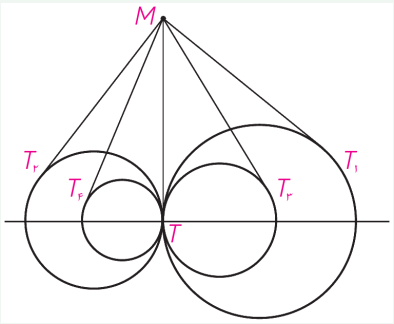
اگر از نقطهٔ A به فاصلهٔ $3x + 1$ از مرکز دایرهٔ $C(O, 5x - 5)$ بتوانیم دو مماس بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $2 < x < 5$ ۲) $3 < x < 4$ ۳) $1 < x < 3$ ۴) $0 < x < 1$

پاسخ:

تمرین

مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطهٔ T بر هم مماس‌اند و از نقطهٔ M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \cdots$

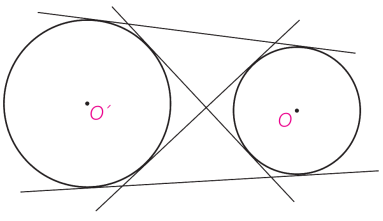


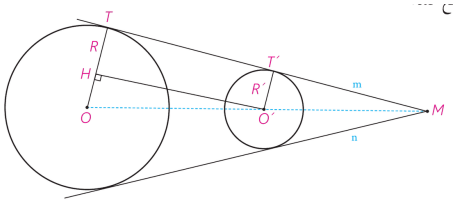
پاسخ:

مماس مشترک

تعریف

خطی که بر دو دایره مماس باشد، **مماس مشترک** دو دایره نامیده می‌شود. اگر مرکزهای دو دایره در یک طرف مماس باشند، آن را **مماس مشترک خارجی** می‌نامند و در حالتی که مرکزهای دو دایره در طرفین مماس باشند، آن را **مماس مشترک داخلی** می‌نامند.





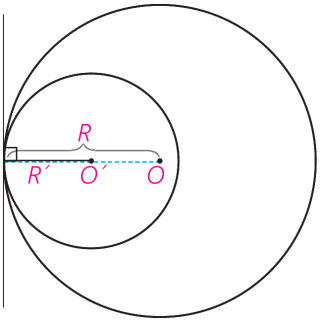
قضیه

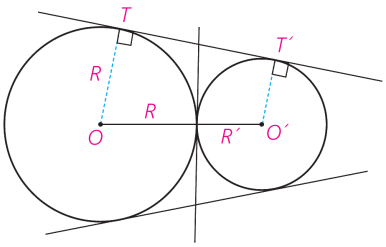
اگر طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برابر d باشد، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی (L) و داخلی (L') و زاویهٔ آن‌ها مطابق جدول زیر به‌دست می‌آید:

مماس مشترک داخلی	مماس مشترک خارجی
$L' = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$	$L = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲}$
$\sin\frac{\theta}{۲} = \frac{R+R'}{d}$	$\sin\frac{\theta}{۲} = \frac{R-R'}{d}$

نکته

بدیهی است که طول مماس مشترک داخلی دو دایره (در صورت وجود) از طول مماس مشترک خارجی کوچک‌تر است. همچنین زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی همواره بزرگ‌تر از زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی است. زاویهٔ $\frac{\theta}{۲}$ همان زاویهٔ خط‌المرکزین و مماس مشترک نیز است.





نکته

در دو دایرهٔ مماس خارج، طول مماس مشترک خارجی برابر $۲\sqrt{RR'}$ است.

تست

اگر طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O,۷)$ و $C'(O',۲۳)$ برابر ۳۴ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره از طول مماس مشترک داخلی آن‌ها چقدر بزرگ‌تر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

پاسخ:

تمرین

طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

از نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ مماسی بر دایره رسم شده است. طول مماس کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ:

تست

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۱۳ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ:

تست

دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۲ و طول خط‌المرکزین ۱۰ مفروض‌اند. طول مماس مشترک داخلی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) $\sqrt{۸۴}$

پاسخ:

تست

دو دایرهٔ متقاطع چند مماس مشترک دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

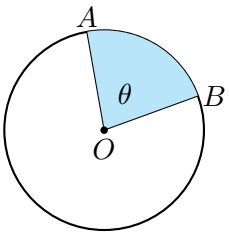
قطاع و قطعه

تعریف

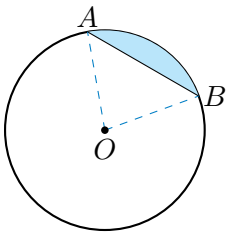
قسمتی از دایره که بین دو شعاع از دایره محدود شده است، **قطاع** نام دارد. همچنین قسمتی از دایره که به وتر و کمان نظیرش محدود شده است، **قطعه** نام دارد.

اگر زاویهٔ مرکزی قطاع در دایرهٔ $C(O,R)$ برابر θ باشد، مساحت قطاع و قطعه به‌صورت زیر است:

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\theta}{۳۶۰^\circ}(\pi R^۲) \qquad S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}}$$



قطاع

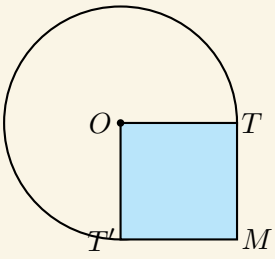


قطعه

تست

در شکل زیر اگر پاره‌خط‌های MT و MT' بر دایره مماس باشند، مساحت قطاع رنگ‌شده چقدر است؟ ($MT = MT' = \sqrt{۲}$؛ O مرکز دایره)

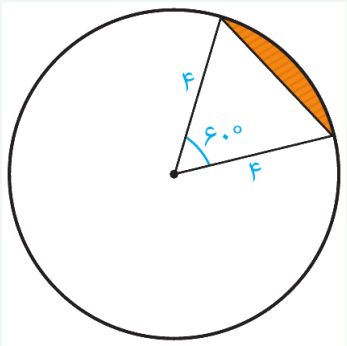
۱) $\pi\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$



پاسخ:

تمرین

مطابق شکل دایره‌ای به شعاع ۴ مفروض است؛ مساحت ناحیهٔ سایه‌زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعهٔ دایره نام دارد.



پاسخ:

نخ دور دایره

اگر مرکز چند دایرهٔ برابر، رأس‌های یک n ضلعی محدب باشند و به کمک یک نخ بخواهیم این دایره‌ها را با هم ببندیم، **طول نخ** و **مساحت شکلی** که توسط نخ ایجاد می‌شود به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (دایره‌ها می‌توانند مماس یا متقاطع نباشند):

مساحت شکل	طول نخ
مساحت یک دایره + (شعاع دایره × محیط n ضلعی) + مساحت n ضلعی	محیط یک دایره + محیط n ضلعی

اگر به مرکز هر یک از رأس‌های یک n ضلعی دایره‌هایی برابر رسم کنیم، مساحت قسمتی از درون n ضلعی که خارج از دایره‌ها قرار دارد با رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{مساحت شکل رنگ‌شده} = \text{مساحت } n \text{ ضلعی} - \text{مساحت } (n-2) \text{ نیم‌دایره}$$

نکته

در رابطهٔ بالا، دایره‌ها حتماً باید غیرمتقاطع باشند (مماس بودن شکلی ایجاد نمی‌کند).

تست

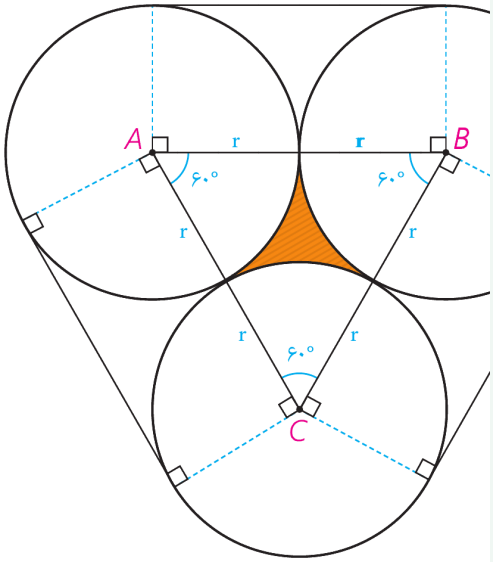
در شکل مقابل به مرکز هر رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC یک دایره به شعاع ۲ رسم کرده‌ایم و به کمک یک نخ دایره‌ها را به هم بسته‌ایم. مساحت شکلی که با نخ به وجود آمده چقدر است؟ (فاصلهٔ دو دایرهٔ مجاور روی دو ضلع AB و AC برابر ۱ و روی ضلع BC برابر ۲ است.)

۱) $2(17+2\pi)$ ۲) $4(3+\pi)$ ۳) $4(11+\pi)$ ۴) $12(4+\pi)$

پاسخ:

تمرین

سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل این سه دایره به‌وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیهٔ محدود به سه دایره برابر $r^۲\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)$ است.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مساحت قطاع ۹۰° از دایره‌ای به شعاع ۴ کدام است؟

۱) ۲π ۲) ۴π ۳) ۸π ۴) ۱۶π

پاسخ:

تست

مساحت قطعهٔ ۶۰° از دایره‌ای به شعاع ۶ کدام است؟

۱) $۶\pi - ۹\sqrt{۳}$ ۲) $۶\pi - ۱۸\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\pi - ۹\sqrt{۳}$ ۴) $۳\pi - ۹\sqrt{۳}$

پاسخ:

تست

سه دایرهٔ برابر به شعاع ۱ دوبه‌دو مماس‌اند و با یک نخ به هم بسته شده‌اند. طول نخ کدام است؟

۱) $۶ + \pi$ ۲) $۶ + ۲\pi$ ۳) $۳ + ۲\pi$ ۴) $۶ + ۴\pi$

پاسخ:

تست

دو دایرهٔ برابر به شعاع ۳ مماس‌اند و با یک نخ به هم بسته شده‌اند. طول نخ کدام است؟

۱) $۶\pi + ۶$ ۲) $۶\pi + ۱۲$ ۳) $۳\pi + ۱۲$ ۴) $۱۲\pi + ۶$

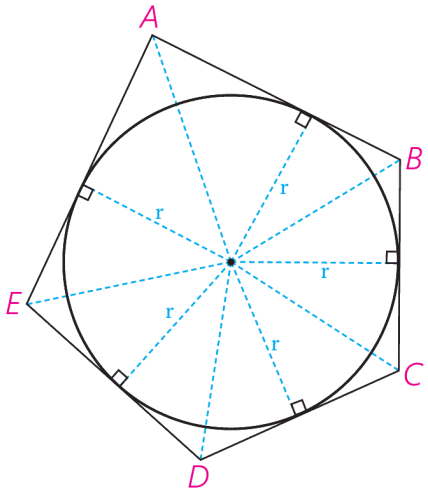
پاسخ:

چندضلعی‌های محاطی و محیطی

چندضلعی‌های محیطی و محاطی

تعریف

اگر یک n ضلعی بر یک دایره **محیط** شود (همهٔ اضلاع آن بر دایره مماس شود)، آن‌گاه مرکز دایره، محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن n ضلعی است؛ به این n ضلعی، **چندضلعی محیطی** می‌گویند.



قضیه

- یک n ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن همرس باشند.
- اگر در یک n ضلعی، $(n-1)$ نیمساز همرس باشند، آن‌گاه n امین نیمساز نیز از نقطهٔ همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ نیمسازها همرسند.

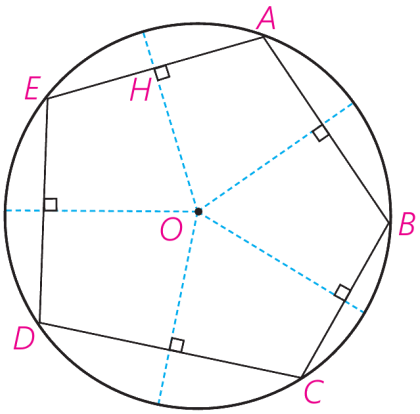
قانون

مساحت هر n ضلعی محیطی برابر است با حاصل‌ضرب شعاع دایرهٔ محاطی در نصف محیط n ضلعی:

$$S = r \cdot p$$

تعریف

اگر یک n ضلعی درون دایره **محاط** شود (یک دایره از همهٔ رأس‌های آن بگذرد)، آن‌گاه مرکز دایره، محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع آن n ضلعی است؛ به این n ضلعی، **چندضلعی محاطی** می‌گویند.



قضیه

۰. یک n ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند.

۰. اگر در یک n ضلعی، $(n-1)$ عمودمنصف همرس باشند، آن‌گاه n امین عمودمنصف نیز از نقطهٔ همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ عمودمنصف‌ها همرسند.

تست

در یک شش‌ضلعی محدب نیمسازهای ۵ تا از زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس شده‌اند، در این صورت ▯

۱) دایره‌ای وجود دارد که از همهٔ رأس‌های این شش‌ضلعی می‌گذرد.

۲) نقطهٔ همرسی از وسط‌های اضلاع به یک فاصله است.

۳) نقطهٔ همرسی از رأس‌ها به یک فاصله است.

۴) نقطهٔ همرسی از اضلاع به یک فاصله است.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ در دایره‌ای محاط شده است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

پاسخ:

تست

مربعی به ضلع ۴ بر دایره‌ای محیط شده است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ:

تست

کدام چهارضلعی همواره محاطی است؟

۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) مستطیل ۴) ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

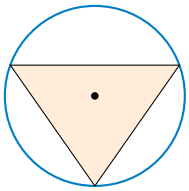
پاسخ:

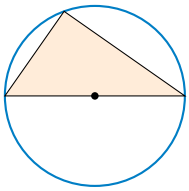
مرکز و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث

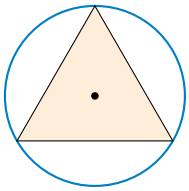
عمودمنصف‌های اضلاع در هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی، نقطه‌ای یکتا است که از سه رأس به یک فاصله است. این نقطه، **مرکز دایرهٔ محیطی** مثلث است.

قانون

- اگر مثلثی زاویهٔ منفرجه داشته باشد، مرکز دایرهٔ محیطی آن، **خارج** مثلث است.
- در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محیطی، **وسط وتر** است.
- در مثلثی که همهٔ زوایای آن حاده است، مرکز دایرهٔ محیطی **داخل** مثلث است.


منفرجه‌الزاویه مثلث


قائم‌الزاویه مثلث

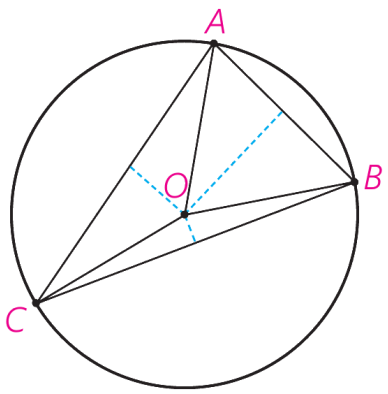

حاده‌الزاویه مثلث

اگر اندازهٔ یک ضلع مثلث و زاویهٔ روبه‌رو به آن معلوم باشد، شعاع دایرهٔ محیطی و فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلع BC برابر است با

قانون

$$R = \frac{BC}{۲\sin A} \qquad OH = R\cos A = \frac{BC}{۲\tan A}$$

(در مثلث OBH: $\sin\alpha = \frac{BC/۲}{R}$ و $\cos\alpha = \frac{OH}{R}$)



نکته

در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایرهٔ محیطی، وسط وتر و شعاع دایرهٔ محیطی، نصف وتر است؛ پس فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا وتر مثلث، صفر است.

نکته

در هر مثلث دلخواه نیمساز هر زاویهٔ داخلی و عمودمنصف ضلع مقابل به آن زاویه، روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند (مطابق شکل، نقطهٔ E وسط کمان BC است).

تست

اندازه‌های دو زاویه از مثلثی برابر ۶۵° و ۷۰° و طول ضلع بین آن‌ها برابر ۴ است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ:

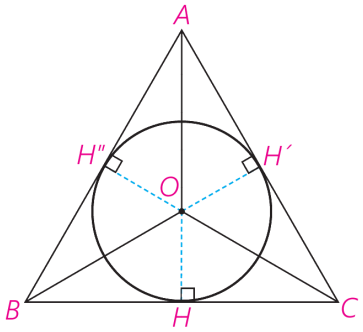
شعاع دایرهٔ محاطی داخلی

نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این نقطه، **مرکز دایرهٔ محاطی داخلی** است.

قانون

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC (با مساوی قرار دادن مجموع مساحت مثلث‌های رنگ‌شده با مساحت مثلث اصلی) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}}$$



$$OH=OH'=OH''=r$$

تست

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ:

شعاع‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع

در مثلث متساوی‌الاضلاع بین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی (r)، شعاع دایرهٔ محیطی (R) و ارتفاع مثلث (h) رابطهٔ زیر برقرار است:

قانون

$$\frac{r}{۱}=\frac{R}{۲}=\frac{h}{۳}$$

یعنی در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، شعاع دایرهٔ محیطی برابر $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع و شعاع دایرهٔ محاطی برابر $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع است.

همچنین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

تست

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر ۲ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ:

محاسبهٔ قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی داخلی

می‌دانیم طول مماس‌هایی که از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن رسم می‌شود با هم برابر است. بنابراین اگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را رسم کنیم، برای محاسبهٔ اندازهٔ قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی روی اضلاع مثلث، در هر کدام از رأس‌ها از این نکته استفاده می‌کنیم. یعنی اگر اندازهٔ اضلاع مثلث ABC معلوم باشد و اندازهٔ قطعه‌ها را بخواهند، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{cases} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{cases} \Rightarrow x=p-a,\quad y=p-b,\quad z=p-c$$

نکته

در رابطه‌های فوق، p نصف محیط مثلث ABC است. در مثلث قائم‌الزاویه ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی از رابطهٔ $r=p-a$ به‌دست می‌آید (a وتر است).

تست

محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۱۴ و طول وتر آن ۶ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰.۵ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ:

تمرین

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

پاسخ:

تمرین

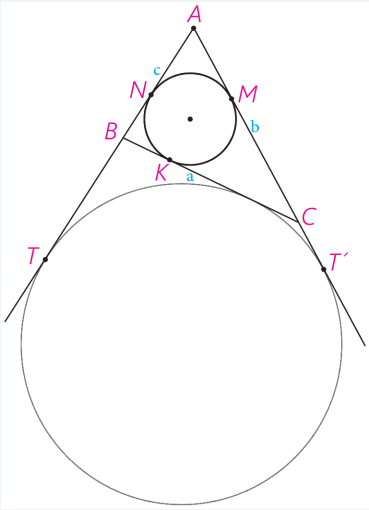
ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

پاسخ:

تمرین

اگر نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و K باشند و T و T' نقاط تماس یک دایرهٔ محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$AM = AN = p-a, \qquad BN = BK = p-b, \qquad CM = CK = p-c, \qquad AT = AT' = p$$



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی با اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ:

تست

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ:

تست

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ:

تست

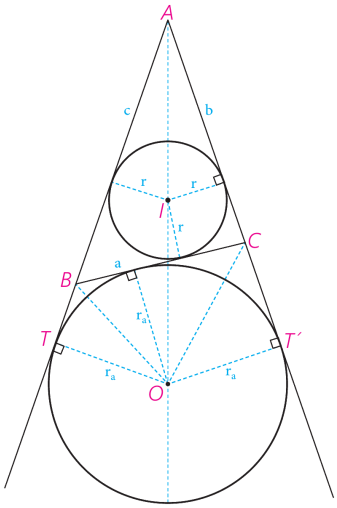
شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

دایرهٔ محاطی خارجی

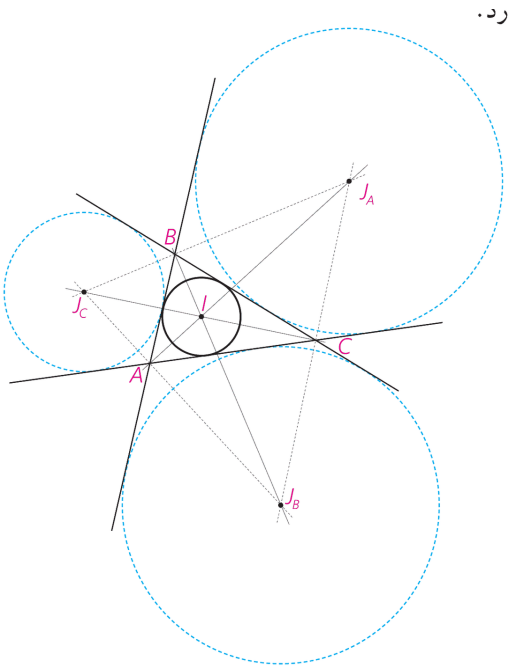
در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی همرسند. نقطهٔ O نقطهٔ همرسی نیمساز زاویهٔ A و نیمسازهای زوایای خارجی B و C است. این نقطه از ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC به یک فاصله است؛ بنابراین مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. به این دایره، **دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس** A می‌گویند.



هر مثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد. اگر p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به‌صورت‌های زیر است:

قانون

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \qquad r_b = \frac{S}{p-b}, \qquad r_c = \frac{S}{p-c}$$



نکته

هرچه ضلع a بزرگ‌تر باشد، $p-a$ کوچک‌تر و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی بزرگ‌تر می‌شود؛ پس بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی، متناظر با بزرگ‌ترین ضلع (روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویهٔ) مثلث است و کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی، روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویه است.

نکته

در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌های محاطی خارجی با ارتفاع مثلث برابر است. (به عبارتی همهٔ چیزهای اندیس‌دار در مثلث متساوی‌الاضلاع برابرند.)

$$r_a = r_b = r_c = h_a = m_a = d_a$$

تست

در مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $۴\sqrt{۳}$، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۲

پاسخ:

قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی خارجی

برای محاسبهٔ طول قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی خارجی روی اضلاع مثلث، همانند دایرهٔ محاطی داخلی عمل می‌کنیم؛ یعنی در هر یک از رأس‌های مثلث از جملهٔ «طول مماس‌هایی که از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن رسم می‌شود با هم برابر است» استفاده می‌کنیم. در نتیجه:

قانون

$$BH = BT = p - c, \qquad CH = CT' = p - b, \qquad AT = AT' = p$$

تست

در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۷ و ۹ دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به دو قسمت تقسیم کرده است. اندازهٔ قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵.۵ ۳) ۵ ۴) ۴.۵

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی با اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مقابل به ضلع ۱۴ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ:

تست

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۳، ۴ و ۵ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مقابل به وتر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

رابطهٔ بین شعاع دایره‌های محاطی

اگر h_a, h_b, h_c سه ارتفاع مثلث، r_a, r_b, r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و R شعاع دایرهٔ محیطی باشد، آن‌گاه:

قانون

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}, \qquad \frac{۱}{r} = \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}, \qquad r_a + r_b + r_c = ۴R + r$$

تست

شعاع دایره‌های محاطی خارجی در مثلثی برابر با ۵، ۱۲ و ۲۰ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی در این مثلث چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

تمرین

اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، نشان دهید

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c سه ارتفاع باشند، نشان دهید

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در مثلثی شعاع دایره‌های محاطی خارجی ۲، ۳ و ۶ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ:

تست

ارتفاع‌های مثلثی ۳، ۶ و ۶ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

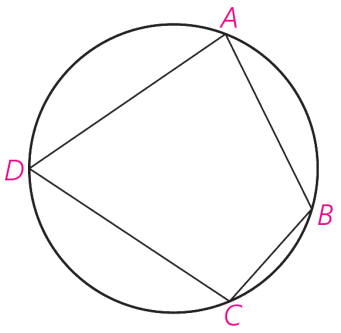
چهارضلعی محاطی

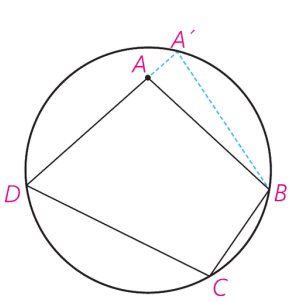
اگر عمودمنصف‌های سه ضلع یک چهارضلعی همرس باشند، آن‌گاه عمودمنصف ضلع چهارم نیز از همان نقطه می‌گذرد. این نقطه از هر چهار رأس به یک فاصله است. حال اگر این نقطه را O بنامیم، $OA = OB = OC = OD$ است؛ بنابراین دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O و شعاع OA از هر چهار رأس این چهارضلعی می‌گذرد. در این صورت به چهارضلعی $ABCD$، **چهارضلعی محاطی** و به این دایره، **دایرهٔ محیطی** چهارضلعی $ABCD$ می‌گوییم.

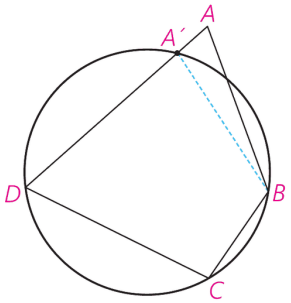
قضیه

یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند:

چهارضلعی محاطی $\iff \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$







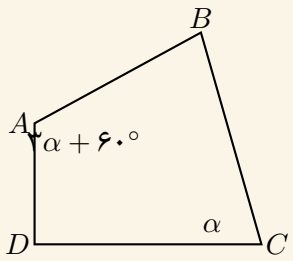
نکته

بعضی از چهارضلعی‌ها محاطی هستند: **مربع**، **مستطیل** و **ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین**. اما متوازی‌الاضلاع و لوزی و کایت در حالت کلی محاطی نیستند. اگر متوازی‌الاضلاعی در دایره محاط شود، تبدیل به مستطیل خواهد شد و اگر کایت لوزی در دایره محاط شود، تبدیل به مربع خواهد شد.

تست

اگر عمودمنصف‌های سه ضلع از چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل زیر، در نقطهٔ O همرس باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ α چقدر است؟ ($\hat{A} = ۳\alpha + ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = \alpha$)

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۳۲°



پاسخ:

تمرین

ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ اگر $\hat{A} = ۷۰^\circ$ باشد، $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) ۷۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۱۰° ۴) ۲۹۰°

پاسخ:

تست

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ زاویه‌های A، B و C با نسبت ۲، ۳ و ۴ هستند. $\hat{D}$ کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

پاسخ:

تست

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ زاویهٔ خارجی رأس B برابر ۸۰° است. $\hat{D}$ کدام است؟

۱) ۸۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۶۰°

پاسخ:

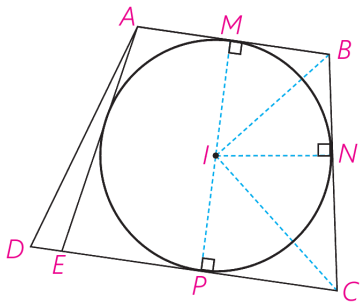
چهارضلعی محیطی

اگر نیمسازهای سه زاویهٔ یک چهارضلعی همرس باشند، آن‌گاه نیمساز زاویهٔ چهارم نیز از همان نقطه می‌گذرد. این نقطه از هر چهار ضلع به یک فاصله است. حال اگر این نقطه را O بنامیم، این نقطه از همهٔ اضلاع چهارضلعی به یک فاصله است. اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم، این دایره بر هر چهار ضلع، مماس خواهد بود. در این صورت به چهارضلعی $ABCD$، **چهارضلعی محیطی** و به این دایره، **دایرهٔ محاطی** چهارضلعی $ABCD$ می‌گوییم.

قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد، آن است که حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع مقابل با حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد:

$$\text{چهارضلعی محیطی} \iff AB + CD = AD + BC$$



نکته

بعضی از چهارضلعی‌ها محیطی هستند: **مربع**، **لوزی** و **کایت**. اما متوازی‌الاضلاع و مستطیل در حالت کلی محیطی نیستند. اگر متوازی‌الاضلاعی در دایره محیط شود، تبدیل به لوزی و اگر مستطیلی محیط شود، تبدیل به مربع خواهد شد.

قانون

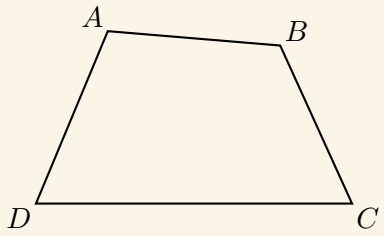
مساحت چهارضلعی محیطی که بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده باشد، به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S = (\text{مجموع دو ضلع مقابل}) \times (\text{شعاع دایرهٔ محاطی})$$

تست

در شکل مقابل $AB = ۵$ و $CD = ۱۱$ است و نیمسازهای زاویه‌های A، B و D همرس‌اند. محیط این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵



پاسخ:

ذوزنقه و نیمسازهای داخلی

قانون

- از برخورد نیمسازهای داخلی هر ذوزنقه (و به‌طور کلی هر چهارضلعی محدب)، یک **چهارضلعی محاطی** به وجود می‌آید.
- از برخورد نیمسازهای داخلی هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی **محاطی و محیطی** (کایت) به وجود می‌آید.
- از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل (چهارضلعی محاطی) و از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، همواره یک مربع (چهارضلعی محاطی و محیطی) ایجاد می‌شود.

تست

وسط‌های اضلاع یک لوزی را به هم وصل کرده‌ایم. از برخورد نیمسازهای داخلی چهارضلعی حاصل، یک چهارضلعی □ ایجاد می‌شود.

۱) محاطی ۲) محیطی ۳) محاطی و محیطی ۴) نه محاطی و نه محیطی

پاسخ:

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیط بر دایره

اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر یک دایره محیط باشد، ارتفاع واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است:

$$r^۲ = x \cdot y, \qquad h = ۲r, \qquad h^۲ = AB \cdot CD$$

(در این رابطه‌ها x و y فاصلهٔ رأس‌ها تا نقاط تماس روی قاعده‌ها هستند.) همچنین مجموع طول دو ساق برابر مجموع طول دو قاعده است.

تست

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای به قطر ۶ واحد محیط است. اگر طول ساق برابر ۷.۵ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

پاسخ:

تمرین

یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

چهارضلعی $ABCD$ بر دایره‌ای محیط شده است. اگر $AB = ۷$، $BC = ۶$ و $CD = ۹$ باشد، AD کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

قاعده‌های ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که بر دایره محیط شده ۴ و ۱۶ است. ارتفاع ذوزنقه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

کدام متوازی‌الاضلاع می‌تواند محیط بر دایره باشد؟

۱) مستطیل غیرمربع ۲) لوزی ۳) هر متوازی‌الاضلاع ۴) متوازی‌الاضلاع غیرلوزی

پاسخ:

n ضلعی منتظم محاطی و محیطی

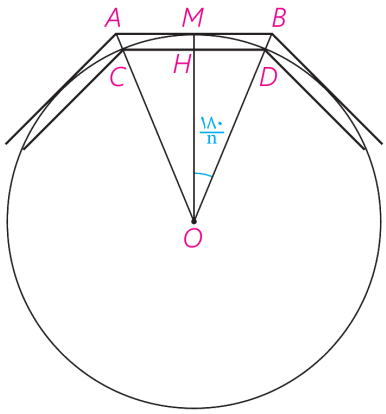
قانون

اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S درون دایره‌ای به شعاع R **محاط** شده باشد، آن‌گاه

$$a = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}, \qquad S = n\left(\frac{۱}{۲}\times R\times R\times\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}\right)$$

اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S بر دایره‌ای به شعاع r **محیط** شده باشد، آن‌گاه

$$a = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}, \qquad S = n\left(\frac{r\cdot a}{۲}\right)$$



تست

مساحت ۶ ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع $r = ۳$ چقدر است؟

۱) $۱۸\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱۶\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳۰}$

پاسخ:

تمرین

یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازهٔ ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه

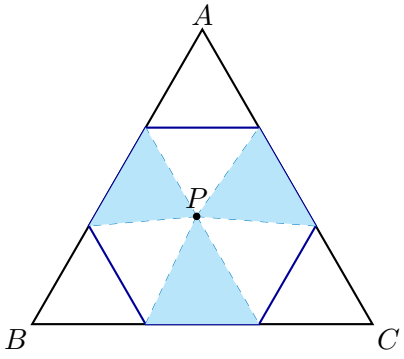
$$CD = ۲r \sin \frac{۱۸۰^\circ}{n} \qquad \text{و} \qquad AB = ۲r \tan \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

پاسخ:

شش‌ضلعی منتظم محاط در مثلث

اگر شش‌ضلعی منتظمی را مطابق شکل درون مثلث متساوی‌الاضلاع محاط کنیم، رابطهٔ زیر بین مساحت‌های شکل‌ها برقرار است (تمرین کتاب درسی):

$$S_۱ + S_۳ + S_۵ = S_۲ + S_۴ + S_۶ = \frac{۱}{۲} S_{\text{شش‌ضلعی}} = \frac{۱}{۳} S_{ABC}$$



نکته

مساحت شش‌ضلعی منتظم فوق، $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و محیط آن نیز $\frac{۲}{۳}$ محیط مثلث است (چون هر ضلع مثلث توسط شش‌ضلعی به سه قسمت برابر تقسیم می‌شود).

اگر O یک نقطه درون شش‌ضلعی محاط در مثلث متساوی‌الاضلاع باشد (اضلاع آن به ترتیب ساعت‌گردی یا پادساعت‌گردی از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند)، شش عمود بر اضلاع رسم می‌کنیم؛ مجموع طول عمودهایی که بر اضلاع با شماره فرد رسم می‌شود با مجموع طول عمودهایی که بر اضلاع با شمارهٔ زوج رسم می‌شود باهم برابر است و هر یک برابر ارتفاع مثلث اصلی است:

$$OA + OB + OC = OM + ON + OP = h_a$$

تست

در شکل زیر شش‌ضلعی منتظمی درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ محاط شده است و P نقطه‌ای دلخواه درون شش‌ضلعی است. حاصل $S_۱ + S_۲ + S_۳$ چقدر است؟ ($S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ مساحت‌های سه مثلث یک‌درمیان رنگ‌شده است.)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ:

شش‌ضلعی و هشت‌ضلعی منتظم

شش‌ضلعی منتظم در واقع ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به هم چسبیده است؛ بنابراین مساحت آن برابر است با

$$S = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\right)$$

قطر بزرگ هر شش‌ضلعی منتظم برابر $۲a$ و قطر کوچک آن برابر $\sqrt{۳}\,a$ است: $AC = \sqrt{۳}\,a$ و $AB = ۲a$.

هشت‌ضلعی منتظم در واقع یک مربع است که از چهار گوشهٔ آن چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بریده شده است و مساحت آن برابر است با مساحت مربع منهای ۴ برابر مساحت یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بریده شده از گوشه‌ها:

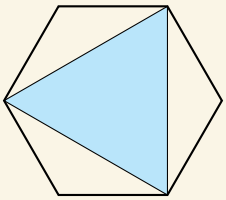
$$S_{\text{هشت‌ضلعی}} = S_{\square} - ۴S_{\triangle}$$

(اگر طول ساق قائم هر مثلث بریده‌شده x باشد، ضلع هشت‌ضلعی $x\sqrt{۲}$ و ضلع مربع $x + x\sqrt{۲} + x$ است.)

تست

در شش‌ضلعی منتظم شکل مقابل که مساحت آن برابر $۲۴\sqrt{۳}$ است، مجموع فواصل مرکز شش‌ضلعی از اضلاع مثلث رنگ‌شده (مثلثی که رأس‌های آن، سه رأس یک‌درمیان شش‌ضلعی است) کدام است؟

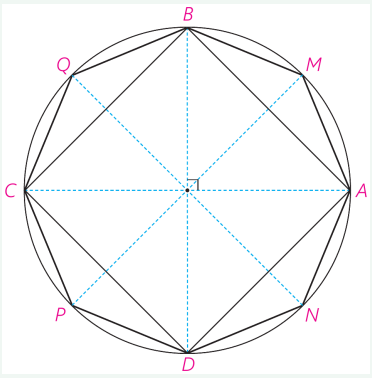
۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶



پاسخ:

تمرین

دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



پاسخ:

تست‌های این بخش

تست

محیط شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۴ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ:

تست

مساحت مربع محاط در دایره‌ای به شعاع ۳ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

مساحت شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۲ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) ۱۲

پاسخ:

تست

شعاع دایرهٔ محاطی شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۴ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: