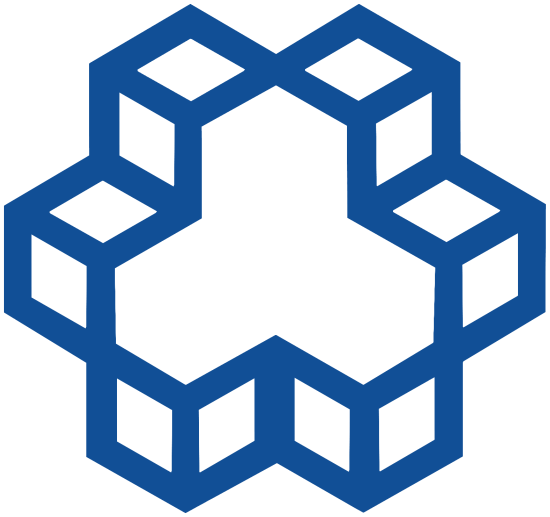

عنوان:تمرین سری‌یک

نیم‌سال تحصیلی:۴۰۴۲

مدرس: دکتر تقی زاده

مبحث تمرین:سینماتیک نسبیتی

مهلت تحویل:۵ خرداد

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۳

۲ سوال دوم ۳

۳ سوال سوم ۳

۴ سوال چهارم ۳

۵ سوال پنجم ۳

۶ سوال ششم ۳

۷ سوال هفتم ۳

۸ سوال امتیازی ۴

۱ سوال اول

عمر ویژه یک ذره مشخص، $120ns$ است.

(الف) اگر این ذره با سرعت $v = 0.950c$ حرکت کند، طول عمر آن در آزمایشگاه چقدر است؟

(ب) در این مدت، ذره در آزمایشگاه چه مسافتی را طی می‌کند؟

(پ) از دید ناظری که با ذره حرکت می‌کند، مسافت طی‌شده در آزمایشگاه چقدر است؟

۲ سوال دوم

یک استاد فیزیک در دادگاه ادعا می‌کند که دلیل عبور او از چراغ قرمز ($\lambda = 650\,\mathrm{nm}$) این بوده که به دلیل حرکت او، رنگ قرمز به سبز ($\lambda = 550\,\mathrm{nm}$) داپلر انتقال یافته است. سرعت او چقدر بوده است؟

۳ سوال سوم

یک لامپ در نقطه x در چارچوب مرجع O با بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ چشمک می‌زند (روشن و خاموش می‌شود). ناظر O' که با سرعت u نسبت به O حرکت می‌کند، بازه زمانی را $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ اندازه می‌گیرد. از عبارات تبدیل لورنتس برای یافتن رابطه بین $\Delta t'$ و Δt استفاده کنید.

۴ سوال چهارم

فرض کنید مسافر موشکی آملیا ساعتی دارد که روی زمین ساخته شده است. هر سال در روز تولدش، یک علامت نوری به برادرش کاسپر روی زمین می‌فرستد.

(الف) کاسپر در طول سفر رفت آملیا، این علامت‌ها را با چه نرخی دریافت می‌کند؟

(ب) در طول سفر برگشت او، علامت‌ها را با چه نرخی دریافت می‌کند؟

(پ) کاسپر چند تا از علامت‌های تولد آملیا را در طول سفری که خودش مدت آن را ۲۰ سال اندازه می‌گیرد، دریافت می‌کند؟

۵ سوال پنجم

دو دوقلو یک سفر رفت و برگشتی از زمین به ستاره‌ای که ۱۲ سال نوری فاصله دارد انجام می‌دهند. آلیس با سرعت $0.6c$ سفر می‌کند. باب ۱۰ سال بعد از آلیس حرکت می‌کند و با سرعت $0.8c$ سفر می‌کند.

(الف) نشان دهید که هر دو دوقلو در یک زمان به زمین بازمی‌گردند.

(ب) کدام دوقلو هنگام بازگشت جوان‌تر است؟

۶ سوال ششم

یک نردبان به طول ویژه $L_0 = 5$ متر در چارچوب سکون خود دارد. یک انبار به طول ویژه $L_{\mathrm{shed}} = 4$ متر در چارچوب سکون خود دارد. نردبان با سرعت $v = 0.6c$ به سمت انبار حرکت می‌کند. در چارچوب انبار، به دلیل انقباض طول، نردبان کوتاه‌تر از انبار به نظر می‌رسد و بنابراین باید در انبار جا بگیرد. اما در چارچوب نردبان، انبار کوتاه‌تر از نردبان است و بنابراین نردبان نباید در انبار جا بگیرد. این ظاهراً یک پارادوکس است.

(الف) طول نردبان را در چارچوب انبار محاسبه کنید.

(ب) طول انبار را در چارچوب نردبان محاسبه کنید.

(پ) با استفاده از تبدیلات لورنتس برای همزمانی، نشان دهید که هیچ پارادوکسی وجود ندارد و درهای انبار (که در دو طرف باز هستند) می‌توانند به گونه‌ای بسته شوند که نردبان به طور کامل در داخل انبار قرار گیرد.

۷ سوال هفتم

- **ناوردایی** به معنای ثابت ماندن مقدار عددی یک کمیت تحت تبدیلات لورنتس است. یعنی اگر کمیتی مانند Q در یک چارچوب لخت اندازه‌گیری شود و در چارچوب لخت دیگر مقدار Q' داشته باشد، در صورتی که $Q' = Q$ باشد، آن کمیت **ناوردا** (Invariant) نامیده می‌شود.
- اما **هموردایی** به این معناست که شکل معادلات فیزیکی تحت تبدیلات لورنتس حفظ می‌شود. یعنی اگر معادله‌ای در یک چارچوب به صورت $F = ma$ نوشته شود، در چارچوب دیگر نیز به همان شکل (اما با کمیت‌های تبدیل‌یافته) نوشته می‌شود.
- **مثال مهم ناوردایی**: فاصله فضا-زمانی

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

تحت تبدیلات لورنتس ناوردا است. یعنی همه ناظرهای لخت بر روی مقدار عددی ds^2 توافق دارند.

اثبات ناوردایی فاصله فضا-زمانی

نشان دهید که کمیت زیر تحت تبدیلات لورنتس ناوردا است:

$$ds^2 = ds'^2$$

۸ سوال امتیازی

روابط لورنتس را اثبات کنید.

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

۹ سوال امتیازی

تبدیل سرعت و شتاب با استفاده از تبدیلات لورنتس:

تبدیلات لورنتس برای دو دستگاه اینرسی S و S' (که S' با سرعت u در امتداد محور x نسبت به S حرکت می‌کند) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

الف) تبدیل سرعت‌ها (قوانین جمع نسبیتی سرعت)

فرض کنید ذره‌ای در دستگاه S دارای سرعت $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ باشد. سرعت ذره در دستگاه S' به صورت $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ است که:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

ب) تبدیل شتاب‌ها

شتاب ذره در دستگاه S برابر $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$ است. می‌خواهیم شتاب در دستگاه S' یعنی $\mathbf{a}' = \left(\frac{dv'_x}{dt'}, \frac{dv'_y}{dt'}, \frac{dv'_z}{dt'}\right)$ را محاسبه کنیم.

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{a_y + \frac{uv_y a_x}{c^2\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}}{\gamma^2\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2}$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \frac{a_z + \frac{uv_z a_x}{c^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}}{\gamma^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}$$

موفق باشید.