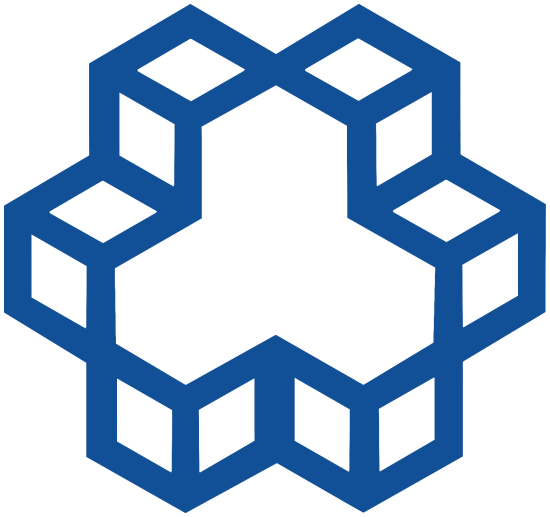


عنوان:تمرین سری ششم

نیم‌سال تحصیلی:۴۰۴۱

مدرس: دکتر محمد انصاری‌فرد

مبحث تمرین:لاگرانژی

مهلت تحویل:۱۹دی

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۳
۲ سوال دوم ۳
۳ سوال سوم ۳
۴ سوال چهارم ۳
۵ سوال پنجم ۴
۶ سوال ششم ۴
۷ سوال امتیازی ۴

تذکر مهم

حل **تمامی سوالات این تمرین صرفاً باید با استفاده از فرمالیسم لاگرانژ و معادلات اویلرلاگرانژ** انجام شود و استفاده از روش‌های نیوتنی مجاز نیست.

۱ سوال اول

معادلات حرکت پرتابه را در میدان گرانشی یکنواخت و بدون مقاومت هوا بدست آورید

۲ سوال دوم

ذره ای در امتداد یک جوی چرخزاد صاف آزادانه حرکت میکند.سطح این چرخزاد در قالب این معادلات پارامتری بیان میشود

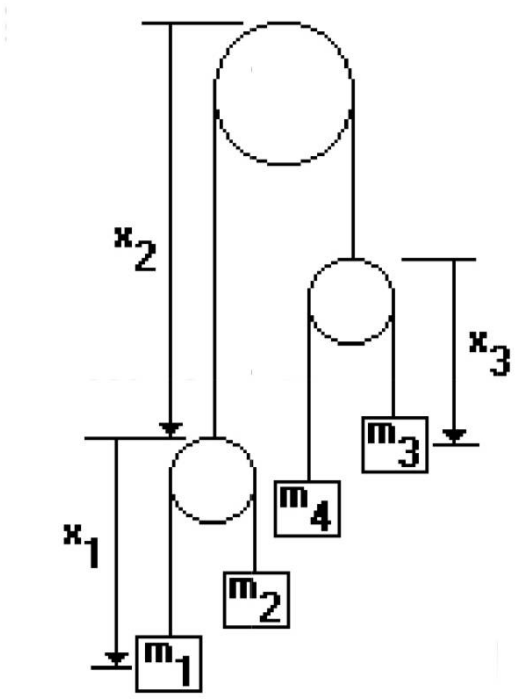
$$x = \frac{a}{4}(2\theta + \sin\theta)$$

$$y = \frac{a}{4}(1 - \cos(2\theta))$$

که در آن $\theta \in [0, \pi]$ و a ثابت است. لانگرانژی و معادلات حرکت ذره را بیابید.

۳ سوال سوم

معادلات ماشین آتوود زیر را بدست آورید.



۴ سوال چهارم

یک ذره به جرم m در فضای سه‌بعدی قرار دارد و تحت تأثیر پتانسیل

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

قرار دارد.

۱. تابع لاگرانژی $L = T - V$ را برای ذره بنویسید، که در آن انرژی جنبشی T برابر است با

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

۲. معادلات اویلرلاگرانژ برای مختصات x, y, z بدست آورید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = x, y, z.$$

۳. معادلات حرکت را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید؛ مثلاً ذره از مبدأ با سرعت اولیه v_0 در جهت x حرکت می‌کند.

۵ سوال پنجم

یک یک ذره به جرم m روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کند و با یک فنر شعاعی به مبدأ متصل است. انرژی پتانسیل فنر به صورت زیر است:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

۱. تابع لاگرانژی $L = T - V$ را در مختصات قطبی (r, θ) بنویسید، که انرژی جنبشی برابر است با

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

۲. معادلات اویلرلاگرانژ برای r و θ بدست آورید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = r, \theta.$$

۳. ثابت حرکت زاویه‌ای (گشتاور زاویه‌ای) را تعیین کنید و معادله حرکت شعاعی را به شکل ساده بیان کنید.

۶ سوال ششم

یک ذره به جرم m روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک حرکت می‌کند. زاویه شیب سطح نسبت به افق α است و نیروی گرانش mg عمل می‌کند.

۱. تابع لاگرانژی $L = T - V$ را برای مختصات x (در امتداد سطح) بنویسید. انرژی جنبشی و پتانسیل به ترتیب:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = mgx\sin\alpha.$$

۲. معادله اویلرلاگرانژ برای $x(t)$ را بدست آورید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

۳. معادله حرکت ذره را حل کنید و سرعت آن را به عنوان تابع زمان پیدا کنید، اگر ذره در ابتدا ساکن بوده باشد.

۷ سوال امتیازی

یک ذره به جرم m در میدان گرانشی یک جرم مرکزی M قرار دارد. میدان گرانشی توسط متریک شوارتزشیلد داده شده است:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

فرض کنید حرکت ذره در صفحه $\theta = \pi/2$ صورت می‌گیرد.

متریک $g_{\mu\nu}$ مشخص‌کننده ساختار هندسی فضازمان بوده و فاصله فضازمانی ds^2 را تعیین می‌کند. زمان ویژه τ زمانی است که توسط ناظر هم‌حرکت با ذره اندازه‌گیری می‌شود و از رابطه

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2$$

به‌دست می‌آید.

۱. لاگرانژی ذره را بنویسید:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

که $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ است و τ زمان محلی ذره است.

۲. معادلات اویلرلاگرانژ را برای مختصات r و ϕ بدست آورید:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

۳. ثابت‌های حرکت زاویه‌ای و انرژی را تعیین کنید:

$$\ell = r^2 \dot{\phi}, \quad E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{t} c^2$$

۴. معادله شعاعی حرکت را به صورت:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2/c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)$$

بدست آورید.

۵. با فرض $r \gg 2GM/c^2$ و سرعت ذره $v \ll c$، تقریب نیوتنی بزنید و معادله حرکت را به شکل کلاسیک:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

کاهش دهید.

موفق باشید.