عنوان : تمرین سری دو

نیم‌سال تحصیلی : ۴۰۴۱

مدرس : دکتر محمد انصاری فرد

مبحث تمرین : ماتریس‌ها، بردارها و حساب برداری

مهلت تحویل : ۵ آبان

فهرست مطالب

۱ سوال اول

فرض کنید سه بردار ثابت $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ از مبدأ (اصل مختصات) به نقاط A, B, C کشیده شده‌اند.

۱. فاصله مبدأ تا صفحه‌ای که از نقاط A, B, C می‌گذرد چقدر است؟

۲. مساحت مثلث ABC چقدر است؟

۲ سوال دوم

نشان دهید که:

۱. $\nabla r^n = n\, r^{\,n-2}\, \vec{r}$

۲. $\nabla^2(\ln r) = \dfrac{1}{r^2}$

توجه: برای آشنایی با عملگر لاپلاسین و نحوه تعریف آن در دستگاه‌های مختصات مختلف، پیوست را مطالعه کنید.

۳ سوال سوم

مؤلفه‌های بردار شتاب $\mathbf{a}$ را در مختصات استوانه پیدا کنید.

$$\mathbf{a} = a_r\, \hat{r} + a_\theta\, \hat{\theta} + a_z\, \hat{z}$$

۴ سوال چهارم

ماتریس تبدیل (تغییر مختصات) را پیدا کنید که یک دستگاه مختصات را به اندازه 120° حول محوری بچرخاند که با محورهای x و y زاویه برابر و با محور z زاویه 30° می‌سازد.

۵ سوال پنجم

یک ذره با سرعت ثابت $v = const$ بر روی منحنی

$$r = k(1 + \cos\theta) \quad \text{(کاردیوئید)}$$

حرکت می‌کند.

۱. مؤلفه شتاب در راستای شعاعی: $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r$

۲. اندازه شتاب: $|\mathbf{a}|$

۳. مشتق زاویه‌ای: $\dot{\theta}$

را محاسبه کنید.

۶ سؤال ششم

مقدار انتگرال سطحی زیر را پیدا کنید:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

که:

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$$

و S سطح بسته‌ای است که توسط کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

تعریف شده است.

۱. انتگرال را به صورت مستقیم محاسبه کنید.

۲. انتگرال را با استفاده از قضیه گاوس محاسبه کنید:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV$$

۷ سوال هفتم

با بسط مستقیم نشان دهید که:

$$|\Lambda|^2 = 1$$

برای سادگی، فرض کنید Λ یک ماتریس تبدیل متعامد دوبعدی است.

۸ سوال امتیازی

با استفاده از تعریف لاپلاسین به‌صورت:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

و روابط گرادیان و دیورژانس در مختصات استوانه‌ای، رابطه‌ی صریح لاپلاسین را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) به‌دست آورید.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۹ پیوست

تعریف لاپلاسین در دستگاه‌های مختصات مختلف

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

عملگر لاپلاسین برای یک تابع اسکالر f در دستگاه‌های مختصات مختلف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. مختصات دکارتی (x, y, z)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۲. مختصات استوانه‌ای (r, θ, z)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۳. مختصات کروی (r, θ, ϕ)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

موفق باشید.